جمهورية مصر العربية
وزارة التجارة والصناعة والاستثمار
مصلحة الكفاية الإنتاجية والتدريب المهني
الإدارة العامة للبرامج والمواصفات

الرياضـــــــيات

الصف الثانى

إعداد

أستاذة / السيدة حسن موسى
مشرف دراسات نظرية
منطقة شرق الإسكندرية

أستاذ / نادر نسيم سلامة
كبير أخصائيين توجيه
رياضيات وميكانيكا
منطقة شرق الإسكندرية

المراجع
د. شعبان الشحات محمد
هيئة الطاقة الذرية

طبعة ٢٠١٦ ـ ٢٠١٧

مقدمـــــــــة

- العلم والتقدم العلمى هو الطريق الوحيد لرفع شأن أى آمة وتحقيق التقدم والرفاهية لأى شعب .
- والتكنولوجيا ما هى إلا استخدام التقدم العلمى فى تطبيقات حياتية تساعد على توفير حياة أسهل للإنسان .
- والتقدم فى علوم الرياضيات هو مفتاح التقدم العلمى والتكنولوجى فى جميع نواحى العلوم المختلفة سواء الحاسبات الآلية – الفضاء – الأجهزة الطبية – الأجهزة المنزلية – صناعات الغزل والنسيج – الذرة – وسائل الاتصال – وسائل المواصلات – التسليح والصناعات العسكرية ....
- الرياضيات تساعد الإنسان على أن يكتسب مهارة التفكير العلمى المنظم .
- الرياضيات تساعد الإنسان على التعامل مع التكنولوجيا الحديثة .
- الرياضيات تساعد الإنسان أن يكون فرد فاعل ومؤثر فى التطوير و الابتكار والتحديث للمعدات التكنولوجية الحديثة ولا أن يكون مستخدم فقط .
- الرياضيات ترسخ فى الإنسان قيمة النظام والدقة .

إذا كنت تريد أن تكون مواطن صالح مؤثر وفعال فى تطوير بلدك والبحث نحو حياة أفضل عليك بالاهتمام بالرياضيات والتفوق فيها لأنها المدخل والمفتاح لأى تطوير فى التكنولوجيا الحديثة.

المؤلفون

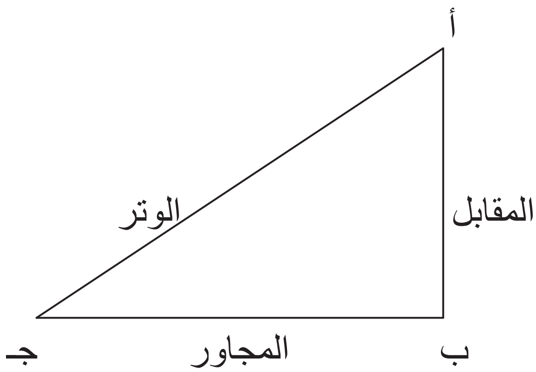
فهرس الكتاب

الوحدة الأولى

حســـاب الـمـثـلـثـات

درسنا فى العام السابق الدوال المثلثية و تعرفنا فيها على أن فى أى مثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب .

١- النسب المثلثية للزاوية (جـ) :



جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

طا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

٢- مقلوب النسب المثلثية :

قتا جـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ قا جـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ ظتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

٣- خواص النسب المثلثية

حا^{2}حـ + جتا^{2}حـ = ١ حاحـ × قتاجـ = ١

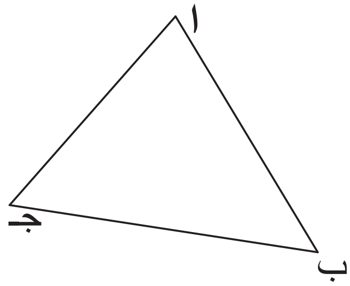
١ + طا^{2}حـ = قا^{2}حـ جتاحـ × قاجـ = ١

١ + ظتا^{2}حـ = قتا^{2}حـ طاحـ × ظتاحـ = ١

طاحـ = $\frac{\text{جاحـ}}{\text{جتاحـ}}$ ظتاجـ = $\frac{\text{جتاحـ}}{\text{حاجـ}}$

سندرس فى هذا العام العلاقة بين الزوايا و الاضلاع فى أى مثلث .

تمهيد :



لكل مثلث ٦ عناصر .

٣ زوايا $<$ أ ، $<$ ب ، $<$ حـ

٣ أضلاع ا/، ب/ ، جـ/

حيث يسمى كل ضلع بأسم الزاوية المقابلة له .

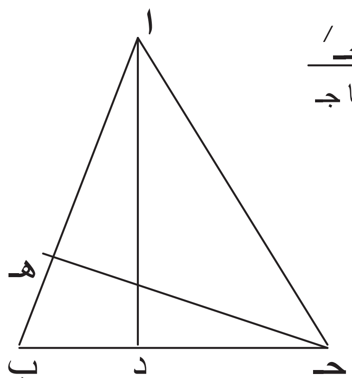
أولاً قاعدة الجيب :

أطوال الاضلاع فى أى مثلث تتناسب مع جيوب الزوايا المقابلة له

أى أن فى أى Δ أ ب جـ

$$\boxed{\frac{\text{أ/}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب/}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ/}}{\text{جا جـ}}}$$

(البرهان غير مقرر على الطالب)



المعطيات ا ب جـ مثلث

المطلوب إثبات أن $\frac{\text{أ/}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب/}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ/}}{\text{جا جـ}}$

العمل نرسم $\overline{\text{اد}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ هـ}} \perp \overline{\text{أب}}$

البرهان فى المثلث أب د

$\overline{\text{اد}} = \text{حـ/ جاب}$ ⟵ (١)

فى المثلث أدجـ

$\overline{\text{اد}} = \text{ب/ حاحـ}$ ⟵ (٢)

من (١) ، (٢)

حـ/ حاب = ب/ جاجـ

$\therefore \frac{\text{ب/}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ/}}{\text{جا جـ}}$

بالمثل يمكن إثبات أن $\frac{\text{أ/}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب/}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ/}}{\text{جا جـ}}$

قاعدة هامة

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طول أى ضلعين منه فى جيب الزاوية المحصورة بينهما

أى أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ أ/ ب/ حاحـ

= $\frac{١}{٢}$ ب/ جـ/ حا أ

= $\frac{١}{٢}$ جـ/ أ/ جا ب

مثال (١)

مثلث أ ب جـ فيه $<$ أ = ٦٠° ، $<$ ب = ٤٥° ، ا/ = ٦ سم أوجد قيمة ب/ ، جـ/ لأقرب رقم عشرى واحد

الحـــل

$$\text{جـ} > = ١٨٠° - (٦٠° + ٤٥°) = ٧٥°$$

$$\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}}$$

$$\frac{٦}{\text{جا}٦٠} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا}٤٥} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا}٧٥}$$

$$\text{ب}' = \frac{٦ \text{ جا}٤٥}{\text{جا}٦٠} = ٤.٩ \text{ سم}$$

$$\text{جـ}' = \frac{٦ \text{ جا } ٧٥}{\text{جا } ٦٠} = ٦.٧ \text{ سم}$$

مثال (٢)

مثلث أ ب جـ فيه أ/ = ١٠ سم ، $<$ أ = ٣٠° ، $<$ ب = ٤٥° أوجد ب/ ، حـ/
و مساحة المثلث ا ب حـ لأقرب عدد صحيح

الحـــل

$$\text{حـ} > = ١٨٠ - (٣٠ + ٤٥) = ١٠٥$$

$$\frac{\text{أ}'}{\text{جاأ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جاب}} = \frac{\text{حـ}'}{\text{جاحـ}}$$

$$\frac{١٠}{\text{جا}٣٠} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا}٤٥} = \frac{\text{حـ}'}{\text{جاح}١٠٥}$$

$$\text{ب}' = \frac{١٠ \text{ حا } ٤٥}{\text{جا}٣٠} = ١٤.١$$

$$\text{حـ}' = \frac{١٠ \text{ حا } ١٠٥}{\text{جا}٣٠} = ١٩.٣$$

$$\text{مساحة المثلث أ ب حـ} = \frac{١}{٢} \text{ ب}' \text{حـ}' \text{ حا أ}$$

مساحة المثلث أ ب جـ $= \frac{١}{٢} \times ١٤.١ \times ١٩.٣$ حا ٣٠

$=$ ٦٨.٠٣ $=$ ٦٨ سم

حقيقة :

$\frac{أ^{/}}{جا\ أ}$	$=$	$\frac{ب^{/}}{جا\ ب}$	$=$	$\frac{حـ^{/}}{جا\ حـ}$	$=$	٢ نق

حيث نق هى نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث

مثال (٣)

مثلث س ص ع فيه ص$^{/}$ = ٧ سم ، $\angle$ص = ٣٠^{o} ، ع$^{/}$ = ٩ سم أوجد نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث و قياس $\angle$ س

الحل

$\frac{ص^{/}}{جا\ ص}$ = ٢ نق

$\frac{٧}{جا٣٠}$ = ٢ نق

٢ نق = ١٤ نق = ٧ سم

$\frac{ع^{/}}{جاع}$ = ٢ نق

$\frac{٩}{جاع}$ = ١٤

حاع = $\frac{٩}{١٤}$ $\angle$ ع = ٤٠^{o}

$\angle$س = ١٨٠ - (٣٠ + ٤٠) = ١١٠

مثال (٤)

مثلث أ ب جـ فيه < أ = ٧٥° ، < حـ = ٤٥° ، ب/ = ٣٠ سم أوجد قياس حـ/ لأقرب رقم عشرى

الحـــــل

< ب = ١٨٠° − (٧٥° + ٤٥°) = ٦٠°

$$\frac{\text{أ}^{/}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}^{/}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}^{/}}{\text{جا حـ}}$$

$$\frac{\text{أ}^{/}}{\text{جا٧٥}} = \frac{\text{٣٠}}{\text{جا٦٠}} = \frac{\text{حـ}^{/}}{\text{جا٤٥}}$$

$$\text{جـ}^{/} = \frac{\text{٣٠ جا ٤٥}}{\text{جا٦٠}} = \text{٢٤.٤٩} = \text{٢٤.٥ سم}$$

تمارين

١) مثلث ا ب جـ فيه أ/ = ٢٠ سم ، < ا = ٣٠° ، < ب = ٤٥° أوجد طول ب/ ، حـ/ لأقرب رقم عشرى واحد و مساحة المثلث

٢) مثلث س ص ع فيه < ا = ٢٦/ ٣٥° ، < ص = ١٨/ ٥٤° ، س/ = ١٠٠ سم أوجد ص/ ، ع/

٣) مثلث ا ب حـ فيه < ا = ٣٠° ، ا/ = ١٨ سم أوجد نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث

٤) مثلث ا ب حـ فيه أ/ = ٢٥ سم ، < ب = ٧٠° ، < حـ = ٨٠ سم أوجد مساحة المثلث أ ب جـ

٥)مثلث ل م ن فيه ل/ = ٥٠ سم ، < م = ٣٠° ، < ن = ٦٠° أوجد مساحة المثلث و طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

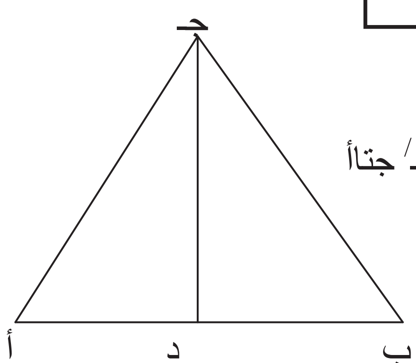
ثانيا قاعدة جيب التمام

فى أى مثلث أ ب حـ

$$\text{أ/}^{٢} = \text{ب/}^{٢} + \text{حـ/}^{٢} - \text{٢ ب/ حـ/ جتاا}$$
$$\text{ب/}^{٢} = \text{حـ/}^{٢} + \text{أ/}^{٢} - \text{٢ حـ/ أ/ جتاب}$$
$$\text{حـ/}^{٢} = \text{أ/}^{٢} + \text{ب/}^{٢} - \text{٢ أ/ ب/ جتاحـ}$$

و يمكن كتابتها غلى الصورة

$$\text{حتا أ} = \frac{\text{ب/}^{٢} + \text{حـ/}^{٢} - \text{ا/}^{٢}}{\text{٢ ب/ حـ/}}$$
$$\text{حتا ب} = \frac{\text{حـ/}^{٢} + \text{أ/}^{٢} - \text{ب/}^{٢}}{\text{٢ حـ/ أ/}}$$
$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{أ/}^{٢} + \text{ب/}^{٢} - \text{حـ/}^{٢}}{\text{٢ أ/ ب/}}$$



البرهان و هو غير مقرر على الطالب

المعطيات: مثلث ا ب جـ

المطلوب: إثبات أن $\text{ا/}^{٢} = \text{ب/}^{٢} + \text{حـ/}^{٢} - \text{٢ ب/ حـ/ جتاأ}$

و أيضا إثبات أن

$$\text{حتا أ} = \frac{\text{ب/}^{٢} + \text{حـ/}^{٢} - \text{ا/}^{٢}}{\text{٢ ب/ حـ/}}$$

العمل: نسقط جـ د $\perp$ اب

البرهان: فى Δ جـ د ب $\quad (\overline{\text{ب جـ}})^{٢} = (\overline{\text{ب د}})^{٢} + (\overline{\text{جـ د}})^{٢} \longrightarrow (١)$

فى Δ جـ د أ $\quad (\overline{\text{جـ د}})^{٢} = (\overline{\text{أ جـ}})^{٢} - (\overline{\text{أ د}})^{٢} \longrightarrow (٢)$

من (١) و (٢) $\quad (\overline{\text{ب جـ}})^{٢} = (\overline{\text{ب د}})^{٢} + (\overline{\text{أ جـ}})^{٢} - (\overline{\text{أ د}})^{٢}$

حيث $\overline{\text{ب د}} = \overline{\text{أ ب}} - \overline{\text{أد}}$

$\therefore \quad (\overline{\text{ب جـ}})^{٢} = (\overline{\text{أ ب}} - \overline{\text{أ د}})^{٢} + (\overline{\text{أ جـ}})^{٢} - (\overline{\text{أ د}})^{٢}$

$= (\overline{\text{أ ب}})^{٢} - \text{٢} \, \overline{\text{أ ب}} \times \overline{\text{أ د}} + (\overline{\text{أ د}})^{٢} + (\overline{\text{أ جـ}})^{٢} - (\overline{\text{أ د}})^{٢}$

$\therefore \quad (\overline{\text{ب جـ}})^{٢} = (\overline{\text{أ حـ}})^{٢} + (\overline{\text{أ ب}})^{٢} - \text{٢} \, \overline{\text{أ ب}} \times \overline{\text{أ ء}}$

حيث $\overline{\text{أ د}} = \overline{\text{أ جـ}}$ جتا أ

$\therefore \quad (\overline{\text{ب جـ}})^{٢} = (\overline{\text{أ جـ}})^{٢} + (\overline{\text{أ ب}})^{٢} - \text{٢} \, \overline{\text{أ جـ}} \times \overline{\text{أ ب}} \text{ جتا أ}$

$أ'^2 = ب'^2 + جـ'^2 - 2\ ب'\ جـ'$ جتا أ ←——— (المطلوب الاول)

$2 ب'\ جـ'$ جتا أ $= ب'^2 + جـ'^2 - أ'^2$

جتا ا $= \frac{ب'^2 + جـ'^2 - أ'^2}{2\ ب'\ جـ'}$ ←——— (المطلوب الثانى)

بالمثل يمكن إثبات باقى صور القانون .

مثال ١ :

Δ أ ب جـ فيه $ب' = ٣٠$ سم ، $حـ' = ١٤$ سم ، $\angle أ = ٦٠^\circ$ أوجد طول $أ'$ لأقرب عدد صحيح

الحـــــل

$ا'^2 = ب'^2 + حـ'^2 - 2\ ب'\ جـ'$ جتا ا

$ا'^2 = (٠٣)^2 + (١٤)^2 - ٢ \times ٣٠ \times ١٤$ جتا ٦٠ $= ٦٧٦$

$أ' = \sqrt{٦٧٦} = ٢٦$ سم

مثال ٢ :

Δ س ص ع فيه $س' = ٨$ سم ، $ص' = ١٠$ سم ، $ع' = ١٤$ سم أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث

الحـــل

قياس أكبر زاوية هى التى تقابل أكبر ضلع فى المثلث الضلع $ع'$

$\therefore$ أكبر زاوية هى $\angle$ ع

حتا ع $= \frac{س'^2 + ص'^2 - ع'^2}{2\ س'\ ص'}$

حتاع $= \frac{(٨)^2 + (١٠)^2 - (١٤)^2}{٢ \times ٨ \times ١٠} = \frac{-١}{٥}$

بإستخدام الآلة الحاسبة فإن

$\angle ع = ١٣'' \ ٣٢' \ ١٠١^\circ$

مـثـــال ٣:

Δ ا ب حـ فيه ا$'$ = ٧ سم ، ب$'$ = ٩ سم ، حـ$'$ = ٥ سم أوجد مساحة المثلث لأقرب رقم عشرى

الحــــل

جتا ا = $\frac{\text{ب}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{أ}'^{٢}}{٢ \text{ ب}' \text{جـ}'}$ = $\frac{(٩)^{٢} + (٥)^{٢} - (٧)^{٢}}{٢ \times ٩ \times ٥}$ = $\frac{١٩}{٣٠}$

$\therefore$ < أ = ٤٢$'$ ٥٠^{o}

$\therefore$ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب$'$ حـ$'$ حا ا

= $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٥ حتا (٤٢$'$ ٥٠^{o}) = ١٧.٤ سم

تمارين

١) Δ أ ب حـ فيه ا$'$ = ١٥ سم ، ب$'$ = ٢٠ سم ، حـ$'$ = ٣٠ سم أوجد قياس زوايا المثلث < ا ، < ب ، < حـ

٢) Δ أ ب حـ فيه أ$'$ = ١٠ سم ، ب$'$ = ١٨ سم ، < حـ = ٧٥^{o} أوجد طول حـ$'$ و مساحة Δأ ب جـ

٣) Δ أ ب حـ فيه ب$'$ = ١٨ سم ، حـ$'$ = ٢٠ سم ، ا = ١٤ سم أوجد قياس أصغر زاوية فى المثلث

٤)Δ ل م ن فيه م$'$ = ٢٤ سم ، ب$'$ = ٢٠ سم ، < ل = ١٥٠^{o} أوجد قيمة ق(< م) ، ق(< ن) ، ل$'$. ثم أوجد مساحة المثلث ل م ن

٥) Δ س ص ع فيه س$'$ = ١٢٠ سم ، ص$'$ = ١٦٠ سم ، ع$'$ = ٢٠٠ سم أوجد قياس كل من < س ، < ص ، < ع . ثم أوجد مساحة المثلث س ص ع

حـــل الـمـثـلـث

سبق أن علمنا أن أى مثلث يتكون من ٦ عناصر هم ٣ أضلاع و ٣ زوايا. و المقصود بحل المثلث هو إيجاد قيمة العناصر المجهولة من العناصر الست بمعلومية باقى العناصر

الحالة الأولى : إذا علم زاويتان و ضلع

١) نوجد قياس الزاوية الثالثة من المثلث = ١٨٠ – (مجموع الزاويتين المعلومتين)

٢) نستخدم قاعدة الجيب للإيجاد طول الضلعين الآخرين

مثال ١ :

Δ أ ب حـ فيه ا/ = ١٢ سم ، < ب = ٤٥° ، < حـ = ٢٥° أوجد حل المثلث

الـــحل

< أ = ١٨٠ – (٤٥° + ٢٥°) = ١١٠°

$$\frac{\text{أ}'}{\text{حا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حـ}'}{\text{حاحـ}}$$

$$\frac{١٢}{\text{حا}١١٠} = \frac{\text{ب}'}{\text{حا}٤٥} = \frac{\text{حـ}'}{\text{حا}٢٥}$$

$$\text{ب}' = \frac{١٢ \text{ حا } ٤٥}{\text{حا } ١١٠} = ٩.٠٢٣ = ٩.٠٣ \text{ سم}$$

$$\text{حـ}' = \frac{١٢ \text{ حا } ٤٥}{\text{حا } ١١٠} = ٥.٣٩٦ = ٥.٤٠ \text{ سم}$$

الحالة الثانية : إذا علم أطوال أضلاعه الثلاثة

نستخدم قاعدة جيب التمام لإيجاد أطوال أضلاعه الثلاثة

مثال ٢ :

Δ أ ب جـ فيه ا/ = ١٥ سم ، ب/ = ٢٥ سم ، حـ/ = ٢٠ سم أوجد حل المثلث

الــحــل

$$\text{حتا ا} = \frac{\text{ب}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{أ}'^{٢}}{\text{٢ ب}'\ \text{جـ}'} = \frac{(٢٥)^{٢} + (٢٠)^{٢} - (١٥)^{٢}}{٢\ (٢٥)(٢٠)} = \frac{٤}{٥}$$

∴ ∠ا = ٣٦° ٥٢′

$$\text{جتا ب} = \frac{\text{حـ}'^{٢} + \text{ا}'^{٢} - \text{ب}'^{٢}}{\text{٢ حـ}'\ \text{ا}'} = \frac{(٢٠)^{٢} + (١٥)^{٢} - (٢٥)^{٢}}{٢\ (٢٠)(١٥)} = ٠$$

∴ ∠ب = ٩٠°

∠حـ = ١٨٠ − (٩٠ + ٣٦° ٥٢′) = ٦٣° ٨′

الحالة الثالثة : إذا علم ضلعان وزاوية محصورة بينهما

١) نستخدم قاعدة جيب التمام لأيجاد طول الضلع الثالث

٢) نستخدم قاعدة جيب التمام لأيجاد الزاويتين المجهولتين

ملحوظة هامة

لإيجاد قيمة زاوية نستخدم قاعدة جيب التمام و ليس قاعدة الجيب لأن قاعدة جيب التمام تميز بين الزاوية الحادة و المنفرجة

مثال توضيحى

جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ جا ١٥٠ = $\frac{١}{٢}$

جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$ جتا ١٢٠ = $\frac{-١}{٢}$

مثال ٣ :

Δ ا ب جـ فيه ا′ = ١٨ سم ، ب′ = ٢٤ سم ، ∠جـ = ٣٥° أوجد حل المثلث

الــحــل

$\text{حـ}'^{٢} = \text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - ٢\ \text{ا}'\ \text{ب}'\ \text{حتا جـ}$

$= (١٨)^{٢} + (٢٤)^{٢} - ٢(١٨)(٢٤)\ \text{حتا ٣٥} = ١٩٢.٢٥٢٦$

حـ′ = ١٣٫٨٦٥ = ١٣٫٨٧ سم

$$\text{جتا ا} = \frac{\text{ب}'^{2} + \text{جـ}'^{2} - \text{أ}'^{2}}{\text{٢ ب}'\ \text{جـ}'} = \frac{(\text{٢٤})^{2} + (\text{١٣٫٨٧})^{2} - (\text{١٨})^{2}}{\text{٢} (\text{٢٤})(\text{١٣٫٨٧})} = \text{٠٫٦٦٧٤٧}$$

∠ا = ٤٨° ٨′

∠ب = ١٨٠ – (٣٥ + ٤٨° ٨′) = ٩٦° ٥٢′

تمــاريــن

١) أوجد حل المثلث أ ب جـ الذى فيه ∠ا = ٣٥° ، ∠حـ = ٤٥° ، جـ′ = ٥٠ سم

٢) أوجد حل المثلث أ ب حـ حيث أ′ = ١٢ سم ، ب′ = ١٨ سم ، حـ′ = ٢٤ سم

٣) Δ ا ب حـ فيه ا′ = ٨ سم ، ب′ = ١٢ سم ، ∠حـ = ٥٦° أوجد حل المثلث

٤) أوجد حل المثلث ا ب حـ حيث ∠ا = ٥٢° ٢٤′ ، ∠ب = ٦٣° ١٧′ ، ب′ = ٢٠ سم

٥) أوجد حل المثلث ا ب حـ حيث ا′ = ٢٠ سم ، ب′ = ٣٠ سم ، حـ′ = ٥٠ سم

٦) Δ ا ب حـ فيه ∠ا = ٨٠° ، ا′ = ١٣ سم ، ب′ = ٢٢ سم أوجد حل المثلث

الوحدة الثانية

الهندسة التحليلية

مراجعة لما سبق دراسته

١) البعد بين النقطتين أ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$)

$$\overline{اب} = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

٢) نقطة تنصيف قطعة مستقيمة أ ب حيث أ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب($س_٢$ ، $ص_٢$)

نقطة التنصيف جـ هى ($\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$)

٣) ميل الخط المستقيم

أولاً : بمعلومية معادلة المستقيم على الصورة ص = م س + جـ

يكون الميل هو معامل س

ثانيا : بمعلومية إحداثى نقطتين عليه ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$)

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

ثالثا : إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة أ س + ب ص + جـ = ٠ فإن

$$م = \frac{- معامل\ س}{معامل\ ص}$$

٤) معادلة الخط المستقيم

أولاً : بمعلومية الميل (م) و الجزء المقطوع من محور الصادات (جـ)

ص = م س + حـ

ثانيا : بمعلومية الميل (م) و نقطة على المستقيم ($س_١$ ، $ص_١$)

(ص − $ص_١$) = م (س − $س_١$)

طول العمود الساقط من نقطة خارجة على مستقيم

طول العود الساقط من نقطة ا($س_١$ ، $ص_١$) على المستقيم ل الذى معادلته
ا س + ب ص + حـ = ٠ هو

$$\text{طول العمود} = \frac{|\text{ا}\,س_١ + \text{ب}\,ص_١ + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{ا}^٢ + \text{ب}^٢}}$$

مثال ١ :
أوجد طول العمود الساقط من النقطة (٢ ، ٣) على المستقيم ٣س + ٤ص – ٧ = ٠

الحـل

$$\text{طول العمود} = \frac{|\text{أ}\,س_١ + \text{ب}\,ص_١ + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{ا}^٢ + \text{ب}^٢}}$$

$$\text{طول العمود} = \frac{|٣(٢) + ٤(٣) - ٧|}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}} = \frac{١١}{٥} = ٢.٢$$

مثال ٢ :
أوجد طول العمود المرسوم من نقطة (٢ ، ٤) على المستقيم المار بانقطتين (٣ ، ٥)
، (٢ ، -٢)

الحــل

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٢ - ٥}{٢ - ٣} = \frac{-٧}{-١} = ٧$$

معادلة المستقيم (ص – $ص_١$) = م (س – $س_١$)
ص – ٥ = ٧ (س – ٣)

∴ ٧س – ص - ١٦ = ٠

$\therefore$ طول العمود $= \dfrac{|\text{أس}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{ا}^٢ + \text{ب}^٢}} = \dfrac{|٧(٢) - (٤) - (١٦)|}{\sqrt{٧^٢ + (-١)^٢}} = \dfrac{٦}{٥\sqrt{٢}}$

مثال ٣ :

اثبت أن المستقيمان ٤س + ٣ص + ٥ = ٠ ، ٣س – ٤ص -١١ = ٠ على أبعاد متساوية من النقطة (١ ، ١)

الحـــل

بعد المستقيم الأول $= \dfrac{|\text{أس}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{ا}^٢ + \text{ب}^٢}} = \dfrac{|٤(١) + ٣(١) + ٥|}{\sqrt{٤^٢ + ٣^٢}} = \dfrac{١٢}{٥}$

بعد المستقيم الثانى $= \dfrac{|\text{أس}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{ا}^٢ + \text{ب}^٢}} = \dfrac{|٤(١) + ٣(١) + ٥|}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}} = \dfrac{١٢}{٥}$

$\therefore$ النقطة (١ ، ١) على بعد ٢.٤ من كل من المستقيمين

مثال ٤ :

Δأ ب حـ فيه ا(٣ ، ٢) ، ب(٢ ، ٥) ، حـ(-٤ ، -٣) أوجد ميل المستقيم ب حـ ، معادلة المستقيم ب حـ ، طول العمود الساقط من ا على ب حـ

الحـــل

ميل المستقيم $= \dfrac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \dfrac{-٣ - ٥}{-٤ - ٢} = \dfrac{-٨}{-٦} = \dfrac{٤}{٣}$

معادلة ب حـ $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م} (\text{س} - \text{س}_١)$

$\text{ص} + ٣ = \dfrac{٤}{٣} (\text{س} + ٤)$

$٣\text{ص} + ٩ = ٤\text{س} + ١٦$

$٤\text{س} - ٣\text{ص} + ٧ = ٠$

بعد المستقيم الثانى = $\frac{|أس_١ + ب ص_١ + حـ|}{\sqrt{ا^٢ + ب^٢}}$

$$= \frac{|٤(٣) - ٣(٢) + ٧|}{\sqrt{٣^٤ + ٤^٣}} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$$

تمـــاريـــن

١) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٥ ، - ٣) على المستقيم

٦س – ٨ص – ٩ = ٠

٢) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (-١ ، ٣) على المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٤) ، (-٣ ، -٣)

٣) إثبت أن النقطة (٢ ، ٢) على أبعاد متساويه من المستقيمين ٥س -١٢ص -١٢ = ٠ ، ١٢س + ٥ص - ٨ = ٠

٤) مثلث أ ب حـ فيه أ (٢ ، ٣) ، ب (٦ ، ٦) ، حـ (٨ ، ٤) أوجد

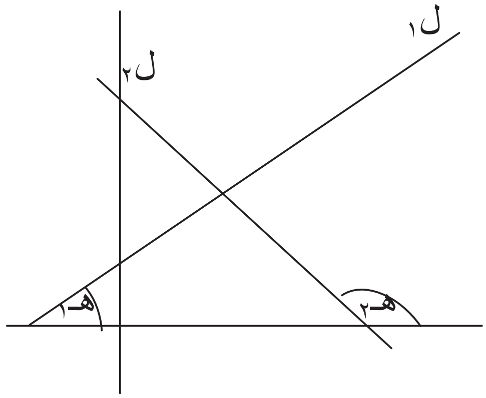
ا- ميل المستقيم ا ب

ب- معادلة المستقيم ا ب

حـ - طول العمود الساقط من حـ على ا ب

٥) أوجد طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المستقيم ٢س – ٣ص + ١٥ = ٠

الزاوية بين مستقيمين



سبق أن درسنا أن ميل المستقيم الذى يصنع زاوية هـ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات هى

م = طا هـ

قاعدة هامة

إذا كان لدينا مستقيمان معادلتهما

ل١ : ص = م١ س + حـ١ الميل = م١

ل٢ : ص = م٢ س + حـ٢ الميل = م٢

فإن قياس الزاوية المحصورة بينهما يمكن تعيينها يالعلاقة

$$\text{طا ى} = \pm \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{1 + \text{م}_1\,\text{م}_2}$$

مثال ١ :

أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيمين

٣س + ٤ص -٤ = ٠ ، ٥س – ٣ص +٢ = ٠

الحل

٣س + ٤ص – ٤ = ٠ $\text{م}_1 = \frac{-3}{4}$

٥س – ٣ص + ٢ = ٠ $\text{م}_2 = \frac{5}{3}$

$$\text{طا ى} = \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{1 + \text{م}_1\,\text{م}_2} = \frac{\frac{-3}{4} - \frac{5}{3}}{1 + \frac{-3}{4} \times \frac{5}{3}} = \pm \frac{-29}{27}$$

$\angle$ ى = ٣′ ٤٧°

، $\angle$ ى = ١٨٠ - ٣′ ٤٧° = ٥٧′ ١٣٢°

مثال ٢ :

إذا كانت الزاوية بين مستقيمين ٤٥° وكان ميل أحدهما = $\frac{٢}{٥}$ أوجد ميل المستقيم الآخر

الحـــل

$$\text{ظاهـ} = \pm \frac{\text{م}_١ - \text{م}_٢}{١ + \text{م}_١ \text{م}_٢}$$

$$\text{ظا } ٤٥ = \pm \frac{\frac{٢}{٥} - \text{م}_٢}{١ + \frac{٢}{٥}\text{م}_٢}$$

$$١ = \pm \frac{\frac{٢}{٥} - \text{م}_٢}{١ + \frac{٢}{٥}\text{م}_٢}$$

$$\frac{٢}{٥} - \text{م}_٢ = \pm \left(١ + \frac{٢}{٥}\text{م}_٢ \right)$$

$$\frac{٢}{٥} - \text{م}_٢ = ١ + \frac{٢}{٥}\text{م}_٢$$

$$\frac{-٧}{٥}\text{م}_٢ = \frac{٣}{٥}$$

$$\text{م}_٢ = \frac{-٣}{٧}$$

$$\frac{٢}{٥} - \text{م}_٢ = -١ - \frac{٢}{٥}\text{م}_٢$$

$$\frac{-٣}{٥}\text{م}_٢ = \frac{-٧}{٥}$$

$$\text{م}_٢ = \frac{٧}{٣}$$

مثال ٣ :

إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين س + ك ص ـ٦ = ٠ ، ٢س ـ ص + ٣ = ٠
يساوى $\frac{\text{ط}}{٤}$ أوجد قيمة ك

الحـــل

س + ك ص ـ ٦ = ٠ $\therefore$ $\text{م}_١ = \frac{-١}{\text{ك}}$

٢س ـ ص + ٣ = ٠ $\therefore$ $\text{م}_٢ = ٢$

$$\text{ظاهـ} = \pm \frac{\text{م}_١ - \text{م}_٢}{١ + \text{م}_١ \text{م}_٢}$$

$$\text{ظا } \frac{\text{ط}}{٤} = \pm \frac{\frac{-١}{\text{ك}} - ٢}{١ - \frac{٢}{\text{ك}}}$$

$$١ = \pm \frac{\frac{-١}{\text{ك}} - ٢}{١ - \frac{٢}{\text{ك}}}$$

ك - ٢ = ± (١ - ٢ك)
ك - ٢ = ١ + ٢ك
ك = - ٣

ك - ٢ = - ١ - ٢ك
ك = ١/٣

∴ ك = { - ٣ ، ١/٣ }

تمارين

١) أوجد الزاوية المحصورة بين كل زوج من المستقيمات

أ- ٣س + ٢ص - ٧ = ٠ ، ص - ٥س + ٤ = ٠
ب- س + ٣ص + ٤ = ٠ ، ٤س - ص - ٢ = ٠
حـ- ٢س + ٤ص - ٥ = ٠ ، س + ص = ٠

٢) Δ أ ب حـ فيه أ(٢ ، ٤) ، ب(٥ ، ٨) ، حـ(- ٢ ، ٤) أوجد قياس < أ

٣) إذا كانت الزاوية بين مستقيمين ٤٥° و كان ميل أحدهما ٣/ء أوجد ميل المستقيم الآخر

٤) المستقيمان ٢س + ك ص + ٧ = ٠ ، س - ٢ص + ٤ = ٠ الزاوية بينهما ٤٥° أوجد قيمة ك

٥) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين س – ص + ٤ = ٠ ، ٢س + ٢ص – ٥ = ٠

الـــــدائـــــرة

تعريف الدائرة

هى المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى المستوى بحيث تبعد مقدار ثابت عن نقطة ثابتة.
و تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة - و البعد الثابت نصف القطر

معادلة الدائرة بمعلومية مركزها و نصف قطرها

إذا فرضنا دائرة مركزها (ل ، م) و نصف قطرها نق فإن معادلتها تكون على الصورة
فإن معادلة الدائرة تكون على الصورة

$$(س - ل)^٢ + (ص - م)^٢ = نق^٢$$

و منها $س^٢ + ص^٢ - ٢ل س - ٢م ص + ل^٢ + م^٢ - نق^٢ = ٠$

أى أن معادلة الدائرة يمكن أن تكون على الصورة

$$\boxed{س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢م ص + ن = ٠}$$

حيث مركزها (- ل ، - م)
و نصف قطرها $نق = \sqrt{ل^٢ + م^٢ - ن}$

حقائق هامة

١) إذا كانت $ل^٢ + م^٢ > ن$ يكون نصف قطر الدائرة حقيقى
٢) إذا كانت $ل^٢ + م^٢ = ن$ يكون نصف القطر = ٠ و تؤول الدائرة الى نقطة
٣) إذا كانت $ل^٢ + م^٢ < ن$ يكون نصف قطر الدائرة تخيلى

مثال ١ :

أوجد مركز و نصف قطر الدائرة التى معادلتها $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٦ص = ٠$

الـــحـــل

$ل = \frac{٤}{٢} = ٢$

$م = \frac{-٦}{٢} = -٣$ مركز الدائرة (- ٢ ، ٣)

$نق = \sqrt{ل^٢ + م^٢ - ن} = \sqrt{(-٢)^٢ + (٣)^٢ - (٠)} = \sqrt{١٣}$

مثال ٢ :

المعادلة $١٥ س^{٢} + ١٥ ص^{٢} - ٦٠ س + ٣٦ ص + ٢٠ = ٠$ تمثل دائرة أوجد مركزها و نصف قطرها .

الـحـل

المعادلة $١٥ س^{٢} + ١٥ ص^{٢} - ٦٠ س + ٣٦ ص + ٢٠ = ٠$

يمكن كتابتها على الصورة $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + \frac{١٢}{٥} ص + \frac{٤}{٣} = ٠$

$ل = \frac{-٤}{-٢} = ٢$ ، $م = \frac{١٢/٥}{-٢} = \frac{-٦}{٥}$

$\therefore$ مركز الدائرة $(٢ ، \frac{-٦}{٢})$

$نق = \sqrt{ل^{٢} + م^{٢} - ن} = \sqrt{(٢)^{٢} + (\frac{-٦}{٥})^{٢} - \frac{٤}{٣}} = \sqrt{\frac{٣٠٨}{٧٥}}$

شروط تمثيل معادلة من الدرجة الثانية لدائرة

١) أن يكون معامل $س^{٢}$ = معامل $ص^{٢}$

٢) أن لا يحتوى على الحد س ص

مثال ٣ :

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (- ٢ ، ٥) و نصف قطرها ١٠ سم

الـحـل

صورة المعادلة $(س - ل)^{٢} + (ص - م)^{٢} = نق^{٢}$

$(س + ٢)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = (١٠)^{٢}$

$س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ١٠ص + ٤ + ٢٥ - ١٠٠ = ٠$

$س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ١٠ص - ٧١ = ٠$

معادلة المماس لدائرة من نقطة على محيطها

معادلة المستقيم المماس للدائرة $س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢م ص + ن = ٠$ من النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) عى محيط الدائرة هى

$$س س_١ + ص ص_١ + ل(س + س_١) + م(ص + ص_١) + ن = ٠$$

مثال ٤ :

أوجد معادلة و ميل المماس للدائرة $س^٢ + ص^٢ + ٢س - ٣ص - ٧ = ٠$
من النقطة (١ ، ٣) الواقعة على محيط الدائرة

الحل

$س^٢ + ص^٢ + ٢س - ٣ص - ٧ = ٠$

$س(١) + ص(٣) + \frac{٢}{٢}(س + ١) - \frac{٣}{٢}(ص + ٣) - ٧ = ٠$

$س + ٣ص + س + ١ - \frac{٣}{٢}ص - \frac{٩}{٢} - ٧ = ٠$

$٢س - \frac{٣}{٢} ص - \frac{٢١}{٢} = ٠$

$٤س - ٣ص - ٢١ = ٠$

ميل المستقيم $= \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٤}{-٣} = \frac{٤}{٣}$

مثال ٢ :

أوجد معادلة المماس للدائرة $س^٢ + ص^٢ + ٥س - ٣ص - ١٤ = ٠$
من النقطة (٢ ، ٣) الواقعة على محيطها

الحل

$س^٢ + ص^٢ + ٥س - ٣ص - ١٤ = ٠$

$س(٢) + ص(٣) + \frac{٥}{٢}(س + ٢) - \frac{٣}{٢}(ص + ٣) - ١٤ = ٠$

٢س + ٣ص + $\frac{٥}{٢}$ س + ٥ - $\frac{٣}{٢}$ ص - $\frac{٩}{٢}$ - ١٤ = ٠

$\frac{٩}{٢}$ س + $\frac{٣}{٢}$ ص - $\frac{٢٧}{٢}$ = ٠

٩س + ٣ص - ٢٧ = ٠

٣س + ص - ٩ = ٠

تمارين

١) أوجد معادلة كل من الدوائر الآتية

أ- مركزها (- ١ ، ٢) و نصف قطرها ١٠

ب- مركزها (- ٥ ، - ٦) و نصف قطرها ٣

٢) أوجد أحداثيات المركز و نصف القطر للدوائر الآتية

أ- س^{٢} + ص^{٢} - ٤س - ٨ص = ٤١

ب- ٣س^{٢} + ٣ص^{٢} - ٥س - ٦ص + ٤ = ٠

٣) أى من المعادلات الآتية تمثل دارة

أ- ٥س^{٢} + ٥ص^{٢} = ٦٢

ب- س^{٢} + ص^{٢} + ٣س + ٤ص - ٥س ص + ٧ = ٠

حـ- ٣س^{٢} + ٤ص^{٢} - ٢س - ٦ص = ٠

د- ٤س^{٢} + ٤ص^{٢} - ١٥س + ٢٦ص - ١١ = ٠

٤) أوجد معادلة المماس للدائرة س^{٢} + ص^{٢} - ٣س - ٤ص - ١٨ = ٠
من النقطة (-٣ ، ٤) الواقعة على محيط الدائرة

٥) أوجد معادلة و ميل المماس للدائرة ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} + ٥س - ٦ص - ٦ = ٠
من نقطة (- ٢ ، - ١) الواقعة على محيطها

الوحدة الثالثة

حـــل الــمــعــادلات

<u>أولا : حل معادلتين فى مجهولين إحداهما من الدرجة الأولى و الأخرى من الدرجة الثانية</u>

نفترض أن المطلوب إيجاد قيم (س ، ص) لحل المعادلتين

$أ_{١}$س + $ب_{١}$ص + $حـ_{١}$ = ٠ ، $أ_{٢}$س^{٢} + $ب_{٢}$س ص + $حـ_{٢}$ص^{٢} + د = ٠

لحل هاتين المعادلتين نتبع الخطوات الآتية :

١- فى المعادلة الأولى نوجد ص بدلالة س أو س بدلالة ص

٢- نعوض عن قيم ص فى المعادلة الثانية و نوجد قيم س

٣- بالتعويض فى المعادة الأولى نوجد قيم ص المقابلة لقيم س

<u>مثال ١ :</u>

أوجد مجموعة حل المعادلتين ٢س + ص = ٤ ، - ٣س^{٢} + ص^{٢} = ٤٨

الــحـــل

٢س + ص = ٤

ص = - ٢س + ٤ ⟵ (١)

- ٣س^{٢} + ص^{٢} = ٤٨

٣س^{٢} - ص^{٢} - ٤٨ = ٠ ⟵ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

٣س^{٢} - (- ٢س + ٤)^{٢} - ٤٨ = ٠

٣س^{٢} - ٤س^{٢} + ١٦س - ١٦ - ٤٨ = ٠

س^{٢} - ١٦س + ٦٤ = ٠

(س - ٨)^{٢} = ٠ (س - ٨) = ٠ س = ٨

بالتعويض فى (١)

ص = - ٢(٨) + ٤ = - ١٢

مجموعة الحل { (٨ ، - ١٢) }

و يكون المستقيم مماس للمنحنى عند النقطة (٨ ، - ١٢)

<u>مثال ٢ :</u>

أوجد مجموعة حل المعادلتين ٥س + ٣ص - ٤ = ٠

س^{٢} + ٤س ص - ٣ص^{٢} + ١٠ = ٠

الحل

$\text{٥س} + \text{٣ص} - ٤ = ٠$

$\text{٣ص} = -\text{٥س} + ٤$

$\text{ص} = \frac{-\text{٥س} + ٤}{٣} \longrightarrow (١)$

$\text{س}^{٢} + \text{٤س ص} - \text{٣ص}^{٢} + ١٠ = ٠ \longrightarrow (٢)$

بالتعويض من (١) فى (٢)

$\text{س}^{٢} + \text{٤س}\left(\frac{-\text{٥س} + ٤}{٣}\right) - ٣\left(\frac{-\text{٥س} + ٤}{٣}\right)^{٢} + ١٠ = ٠$

$\text{س}^{٢} - \frac{٢٠}{٣}\text{س}^{٢} + \frac{١٦}{٣}\text{س} - \frac{٢٥}{٣}\text{س}^{٢} + \frac{٤٠}{٣}\text{س} - \frac{١٦}{٣} + ١٠ = ٠$

$-\text{١٤س}^{٢} + \frac{٥٦}{٣}\text{س} + \frac{١٤}{٣} = ٠$

$\text{٣س٢} - \text{٤س} + ١ = ٠$

$(\text{٣س} - ١)(\text{س} - ١) = ٠$

إما $\text{٣س} - ١ = ٠$

$\text{٣س} = ١$

$\text{س} = \frac{١}{٣}$

بالتعويض فى معادلة (١)

$\text{ص} = \frac{-٥(١/٣) + ٤}{٣} = \frac{٧}{٩}$

أو $\text{س} - ١ = ٠$

$\text{س} = ١$

بالتعويض فى معادلة (١)

$\text{ص} = \frac{-٥(١) + ٤}{٣} = \frac{-١}{٣}$

مجموعة الحل $\left\{ \left(\frac{١}{٣} ، \frac{٧}{٩}\right) ، \left(١ ، \frac{-١}{٣}\right) \right\}$

مثال ٣ :

أوجد مجموعة حل المعادلتين $\text{٣س} - \text{٢ص} + ٤ = ٠$

$\text{س}^{٢} - \text{٢س ص} + \text{٤ص}^{٢} - ٤ = ٠$

الحل

$\text{٣س} - \text{٢ص} + ٤ = ٠$

$\text{٢ص} = \text{٣س} + ٤$

ص = $\frac{٣س + ٤}{٢}$ $\longrightarrow$ (١)

س^{٢} - ٢س ص + ٤ص^{٢} - ٤ = ٠ $\longrightarrow$ (٢)

بالتعويض من معادلة (١) فى (٢)

س^{٢} - ٢س ($\frac{٣س + ٤}{٢}$) + ٤ ($\frac{٣س + ٤}{٢}$)^{٢} - ٤ = ٠

س^{٢} - ٣س^{٢} - ٤س + ٩س^{٢} + ٢٤س + ١٦ - ٤ = ٠

٧س^{٢} + ٢٠س + ١٢ = ٠

(٧س + ٦)(س + ٢) = ٠

إما ٧س + ٦ = ٠

٧س = - ٦

س = $\frac{-٦}{٧}$

بالتعويض فى (٢) ص = $\frac{٥}{٧}$

أو س + ٢ = ٠

س = - ٢

بالتعويض فى (١) ص = - ١

مجموعة الحـــل { ($\frac{-٦}{٧}$ ، $\frac{٥}{٧}$) ، (- ٢ ، - ١) }

تمـــاريـــن

أوجد مجموعة حل كل زوج من المعادلات الآتية

١) ٣س - ٢ص + ١ = ٠

٢س^{٢} + ٢س ص - ٤ص^{٢} = ٠

٢) س - ص = ٣

س^{٢} - ص^{٢} = ٠

٣) ص = ٣س + ٤

س^{٢} - ٢س ص + ص^{٢} - ٤ = ٠

٤) ٥س - ٢ص + ٣ = ٠

٣س^{٢} + ٢س ص - ٢ص^{٢} = ٠

ثانيا : الأسس و حل المعادلات ألأسية

الأس هو تعبير عن عدد مرات ضرب رقم فى نفسة ضرب تكرارى عد من المرات

مثال $٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{٥}$

$س \times س \times س \times س = س^{٤}$

الآتى ملخص لقوانين الأسس التى سبق دراستها فى المراحل السابقة

قوانين الأسس

١) $س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$

٢) $\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$

٣) $(س^{م})^{ن} = س^{م \times ن}$

٤) $(س ص)^{م} = س^{م} \times ص^{م}$

٥) $\left(\frac{س}{ص}\right)^{م} = \frac{س^{م}}{ص^{م}}$

٥) $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{م/ن}$

حقائق متعلقة بالأسس

١) $س^{صفر} = ١$

٢) $١^{م} = ١$

٣) $س^{م} = \frac{١}{س^{-م}}$

٣) $س^{-م} = \frac{١}{س^{م}}$

٥) $\left(\frac{س}{ص}\right)^{-م} = \left(\frac{ص}{س}\right)^{م}$

قاعدة هامة لحل المعادلات الأسية

١) إذا كان $س^{م} = س^{ن}$ فإن $م = ن$

٢) إذا كان $س^{م} = ص^{م}$ فإن

أ) $س = ص$ إذا كانت م عدد فردى

ب) $س = \pm ص$ إذا كانت م عدد زودى

مثال ١ :

إختصر لأبسط صورة أ) $\sqrt{٣} \times (\sqrt{٣})^{-٤} \times (\sqrt{٣})^{٧}$

ب) $\dfrac{(\sqrt{٥})^{-١} \times (\sqrt{٥})^{٣}}{(\sqrt{٥})^{-٢}}$

الحـــل

أ) $\sqrt{٣} \times (\sqrt{٣})^{-٤} \times (\sqrt{٣})^{٧} = (\sqrt{٣})^{١-٤+٧} = (\sqrt{٣})^{٤} = ٩$

ب) $\dfrac{(\sqrt{٥})^{-١} \times (\sqrt{٥})^{٣}}{(\sqrt{٥})^{-٢}} = (\sqrt{٥})^{-١+٣+٢} = (\sqrt{٥})^{٤} = ٢٥$

<u>مثال ٢ :</u>

حل المعادلة $٢^{س} = ١٦$

الحـــل

$٢^{س} = ١٦ = ٢^{٤}$

$\therefore$ س $= ٤$

<u>مثال ٣ :</u>

حل المعادلة $س^{-٤/٣} = ٨١$

الحـــل

$س^{-٤/٣} = ٨١ = ٣^{٤}$

$(س^{-٤/٣})^{-٣/٤} = (٣^{٤})^{-٣/٤}$

$س = ٣^{-٣} = \dfrac{١}{٣^{٣}} = \dfrac{١}{٢٧}$

<u>مثال ٤ :</u>

حل المعادلة $٥^{(٣س-٣)} = ١$

الحـــل

$٥^{(٣س-٣)} = ١ = ٥^{٠}$

$٣س - ٣ = ٠$

$٣س = ٣$ $\qquad \therefore$ س $= ١$

مثال ٥ : حل المعادلة $٢^{٢س} - ١٧ \times ٢^{س} + ١٦ = ٠$

الحل

$$٢^{٢س} - ١٧ \times ٢^{س} + ١٦ = ٠$$

$$(٢^{س} - ١٦)(٢^{س} - ١) = ٠$$

إما $٢^{س} - ١٦ = ٠$ أو $٢^{س} - ١ = ٠$

$٢^{س} = ١٦ = ٢^{٤}$ $\qquad$ $٢^{س} = ١ = ٢^{٠}$

$س = ٢$ $\qquad$ $س = ٠$

مجموعة الحل س = { ٢ ، ٠ }

تمارين

١) أوجد قيمة س التى تحقق المعادلة $٣^{٢س} = ٨١$

٢) أوجد قيمة س التى تحقق المعادلة $٢^{٣+س} = ٦٤$

٣) حل المعادلة $٥^{(٢س - ٣)} = \left(\frac{١}{٢٥}\right)^{س-٦}$

٤) حل المعادلة $س^{٢/-٣} = \frac{١}{٢٧}$

٥) إذا كانت $(س - ٧)^{٥} = ٣٢$ أوجد قيمة س

٦) إذا كان $٣^{٢س} - ١٢ \times ٣^{س} + ٢٧ = ٠$ أوجد مجموعة حل المعادلة

٧) أوجد حل المعادلة $٧^{٢س-٦} = ١$

٨) حل المعادلة $٥^{س} = ٦٢٥$

٩) حل المعادلة $(\sqrt{٥})^{س} = ١٢٥$

اللوغاريتمات

اللوغاريتم هو صورة للتعبير عن الدالة الأسية

مثال $١٢٥ = ٥^{٣}$ يمكن كتابها على الصورة $٣ =$ لو$_{٥}١٢٥$

ص $=$ م^{س} يمكن كتابها على الصورة س $=$ لو$_{م}$ص

يسمى (م) الأساس ، (س) ألأس ، (ص) القيمة العددية

و يمكن أيضا تحويل الصورة اللوغاريتمية إلى صورة اسية مثال

لو$_{٣}٨١ = ٤$ يمكن كتابتها على الصورة $٣^{٤} = ٨١$

لو$_{م}$س $=$ ص يمكن كتابتها على الصورة م$^{ص} =$ س

خواص الدوال اللوغاريتمية

١) الأعداد الحقيقية السالبة ليس لها لوغاريتم

٢) إذا كان لو$_{م}$س $=$ لو$_{م}$ص فإن س $=$ ص

٣) إذا كان س $=$ ص فإن لو$_{م}$س $=$ لو$_{م}$ص

حل المعادلات اللوغاريتمية :

يمكن حل المعادلة اللوغاريتمية بإعادتها الى الصورة الأسية و حلها كمعادلة أسية

مثال ١ : أوجد قيمة :

أ) لو$_{٢}٦٤$ ، ب) لو$_{٤}٢٥٦$ ، حـ) لو$_{٣}\frac{١}{٢٤٣}$ ، د) لو$_{١٠}١٠٠٠$

الحل

أ) لو$_{٢}٦٤ =$ س

$٢^{س} = ٦٤ = ٢^{٦}$ $\therefore$ س $= ٦$

ب) لو$_{٤}٢٥٦ =$ س

$٤^{س} = ٢٥٦ = ٤^{٤}$ $\therefore$ س $= ٤$

حـ) لو$_{٣}\frac{١}{٢٤٣} =$ س

$٣^{س} = \frac{١}{٢٤٣} = \frac{١}{٣^{٥}} = ٣^{-٥}$ $\therefore$ س $= -٥$

د) لو$_{١٠}١٠٠٠ =$ ص

$١٠^{ص} = ١٠٠٠ = ١٠^{٣}$ $\therefore$ ص $= ٣$

مثال ٢ : أوجد قيمة س فى المعادلات الآتية :

أ) لو$_{ه}$ $\frac{١}{١٢٥}$ = س ، ب) لو$_{س}$ ١ . ٠ . ٠ = ٣

الحل

أ) لو$_{ه}$ $\frac{١}{١٢٥}$ = س

٥^{س} = $\frac{١}{١٢٥}$ = ٥$^{-٣}$ $\therefore$ س = -٣

ب) لو$_{س}$ ٠.٠٠١ = ٣

س^{٣} = ٠.٠٠١ = (٠.١)^{٣} $\therefore$ س = ٠.١

مثال ٣ : حل المعادلة لو$_{ه}$ (س – ٢) = ٠

الحل

لو$_{ه}$ (س – ٢) = ٠

(ه)^{٠} = س - ٢

س - ٢ = ١ $\therefore$ س = ٣

تمارين

١) حل المعادلات الآتية

أ) لو$_{\sqrt{٧}}$ ص = ٠

ب) لو$_{٣}$ (٢س – ٥) = ٣

حـ) لو$_{س}$ ٦٢٥ = ٤

د) لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ = س

٢) أوجد القيمة العددية للآتى :

أ) لو$_{ه}$ $\frac{٦٢٥}{٨١}$ ب) لو$_{١٠}$ ٠.٠٠١

جـ) لو$_{\sqrt{٢}}$ ٤$\sqrt{٢}$ د) لو$_{٢}$ $\frac{١}{٣٢}$

قوانين اللوغاريتمات

١) $لو_م(س \times ص) = لو_م س + لو_م ص$ ٢) $لو_م \frac{س}{ص} = لو_م س - لو_م ص$

٣) $لو_م س^ن = ن\, لو_م س$ ٤) $لو_م م = ١$

٤) $لو_م ١ = ٠$

اللوغاريتمات المعتادة :

هو اللوغاريتم الذى أساسه ١٠ ولا يكتب ألأساس فى هذه الحالة

$لو_{١٠} س = لو س$ ، $لو ١٠ = ١$

مثال ١ :

إذا كان لو٢ = ٠.٣٠١٠ ، لو٣ = ٠.٤٧٧١ ، لو٥ = ٠.٦٩٩٠ أوجد قيمة كل من الآتى بدون استخدام الآلة ا) لو١٥ ب) $لو \frac{٥}{٢}$ حـ) لو٨١

الـحــل

أ) لو١٥ = لو٥ x ٣ = لو٥ + لو٣

= ٠.٦٩٩٠ + ٠.٤٧٧١ = ١.١٧٦١

ب) $لو \frac{٥}{٢}$ = لو٥ - لو٢ = ٠.٦٩٩٠ - ٠.٣٠١٠ = ٠.٣٩٨٠

حـ) لو٨١ = $لو ٣^٤$ = ٤ لو٣ = ٤ x ٠.٤٧٧١ = ١.٩٠٨٤

مثال ٢ : إختصر لأبسط صورة لو٨١ - $لو ٣^٣$ - لو٣

الـحــل

لو٨١ - $لو ٣^٣$ - لو٣ = $لو ٣^٤$ - $لو ٣^٣$ - لو٣

= ٤لو٣ - ٣ لو٣ - لو٣ = ٠

إستخدام الآلة الحاسبة

أولا : إيجاد قيمة اللوغاريتم لأى رقم

مثال ١ : لإيجاد قيمة لو٧٥ بإستخدام الآلة نتبع الآتى

الحــل

Log | 7 | 5 | = ⟶ 1.8750

أى أن لو٧٥ = ١.٨٧٥٠

مثال ٢ : أوجد قيمة لو ٣٤٢.٩٦٥

الحــل

Log | 342.965 | = ⟶ 2.5352

أى أن لو٣٤٢.٩٦٥ = ٢.٥٣٥٢

ثانيا : إيجاد قيمة العدد إذا علم لوغاريتمه

مثال ٣ : إذا كان لوس = ٢.٩٧١٨ أوجد قيمة س

الحــل

Shift | log | 2.9718 | = ⟶ 937.1303

مثال ٤ : إذا كان لو س = ٤ أوجد قيمة س

الحــل

shift | log | 4 | = ⟶ 10000

مثال ٥ : أوجد العدد الذى لوغاريتمه - ١.٧٢٥١

الحــل

Shift | log | - | 1.7251 | = ⟶ 0.0188

تمارين

١) إذا كان لو٢ = ٠.٣٠١٠ ، لو٥ = ٠.٦٩٩٠ ، لو٧ = ٠.٨٤٥٠
أوجد بدون إستخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :
أ) لو ٣٥ ، ب) لو $\frac{٧}{٥}$ ، جـ) لو١٢٥

٢) إذا كان لو٥ = ٠.٦٩٩٠ ، لو ١٠٠ = ٢ أوجد بدون إستخدام الآلة قيمة
أ) لو٥٠٠ ب) لو ٠.٠٥

٢) إختصر لأبسط صورة
أ) لو٦٢٥ + لو٢٥ - لو١٢٥
ب) $لو_{٧}٣٤٣ \div لو_{٧}٤٩$
حـ) $\frac{لو٨١ - لو٣}{لو٢٧}$

٣)أوجد قيمة لوغاريتم كل من الأعداد الآتية
أ) ٤٦٩.٥٨١٩
ب) ٢٧.٣٠٨٥
جـ) ٠.٠٠٧٦
د) ١.٢٣٤

٤) أوجد قيمة س إذا كان
أ) لو س = ١٠٠٠
ب) لو س = ٢.٣٧٤٩
حـ) لو س = - ١.٥٨٦٠

الوحدة الرابعة

البرمجة الخطية

أولا : المتباينات من الدرجة الأولى و حلها :

المتباينة كما سبق دراستها فى المرحلة الأعدادية هى علاقة بين طرفين مثل

س < ل ، ص ≤ ٥ ، ع ≥ ٣س

كما سبق دراسة تمثيل المتباينة على خط الأعداد

خواص المتباينات

١) إذا كان س ≤ ص فإن

أ) س ± ل ≤ ص ± ل

ب) س x ل ≤ ص x ل   إذا كانت ل > ٠ (ل كمية موجبة)

س x ل ≥ ص x ل   إذا كانت ل < ٠ (ل كمية سالبة)

٢) إذا كانت س ≥ ص فإن

أ) س ± ل ≥ ص ± ل

ب) س x ل ≥ ص x ل   إذا كانت ل > ٠ (ل كمية موجبة)

س x ل ≤ ص x ل   إذا كانت ل < ٠ (ل كمية سالبة)

حل متباينة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد :

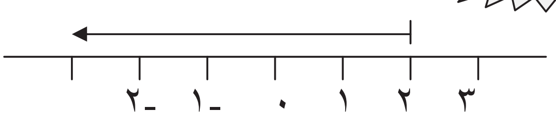
مثال ١ : حل المتباينة ٣س + ٤ < ١٠ و مثلها على خط الأعداد

الحل

٣س + ٤ < ١٠

٣س < ٦

س < ٢   س =] ٢ ، - ∞ [



مثال ٢ : أوجد على خط الأعداد حل المتباينة ١٣ – ٤س ≥ ١

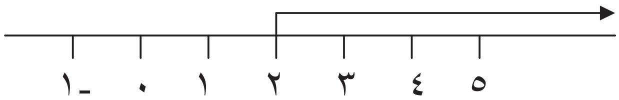
الحــل

١٣ - ٤س ≥ ١

- ٤س ≥ - ١٢

٤س ≤ ١٢

س ≤ ٣ س = [٣ ، ∞ [



حل متباينتين من الدرجة الأولى فى مجهول واحد :

مثال ١ : أوجد قيم س التى تحقق المتباينتان الآتيتان مع تمثيلهما على خط الأعداد

٣س - ١١ < ١ ، ٣ - ٢س ≥ ٧

الحــل

٣س - ١١ < ٤

٣س < ١٥

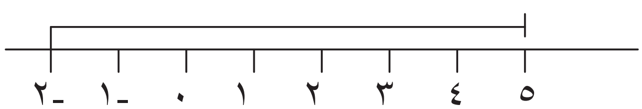
س < ٥ س =] -∞ ، ٥ [

٣ - ٢س ≥ ٧

- ٢س ≥ ٤

س ≤ - ٢ س =] ∞ ، - ٢]

س =] ٥ ، - ٢]



تمــاريــــــن

١) أوجد حل المتباينات الآتية مع تمثيلها على خط الأعداد

ا) س + ٤ ≥ ٥ ب) س/٣ - ٣ < - ٢

حـ) ٥ - ٢س ≤ ٣

٢) أوجد قيم س التى تحقق كل من المتباينتين الآتيتين مع تميلها على خط الأعداد

ا) ٣ - ٢س ≤ ٥ ، ٥س + ٤ ≤ - ٦

ب) ٥س - ١١ > ٢س - ٢ ، ٤ - ٧س ≥ ١١ - ٨س

حـ) ٣س + ٢ < ٥ ، ٩ - ٢س < ١

حل متباينة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد بيانيا

مثال ١ :

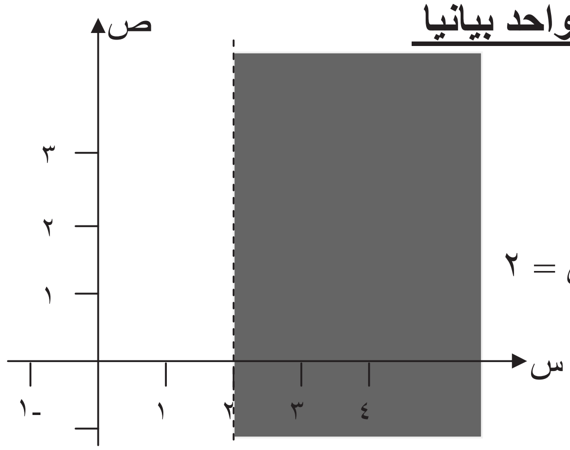
أرسم المتباينة س > ٢

الــحــل

س =] ٢ ، ∞ [

نرسم خط متقطع يوازى محور الصادات عند س = ٢

الجزء المظلل يمثل حل المتباينة الى ∞



مثال ٢ :

أرسم المتباينة ص ≤ ٣

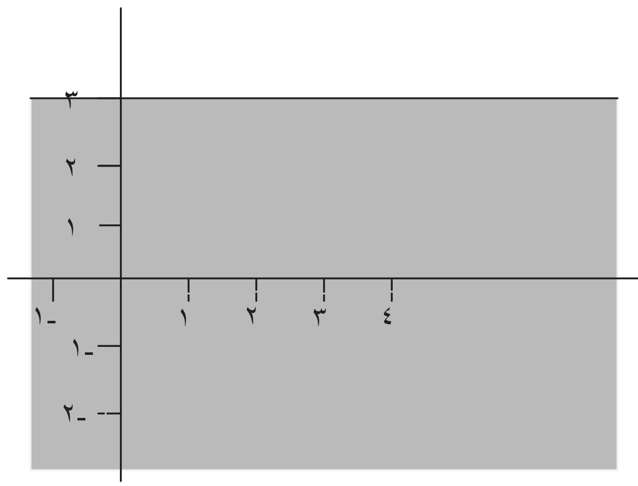
الــحــل

ص =] ٣ ، - ∞ [

نرسم خط مستقيم يوازى محور السينات

عند ص = ٣

الجزء المظلل يمثل حل المتباينة الى - ∞



حل متباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين بيانيا

مثال ٣ : أرسم المتباينة س + ٢ص > ٣

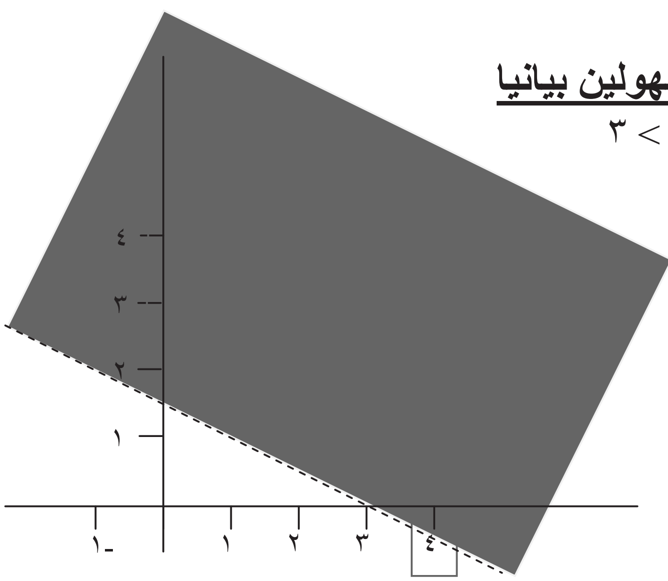
الــحــل

س + ٢ص > ٣

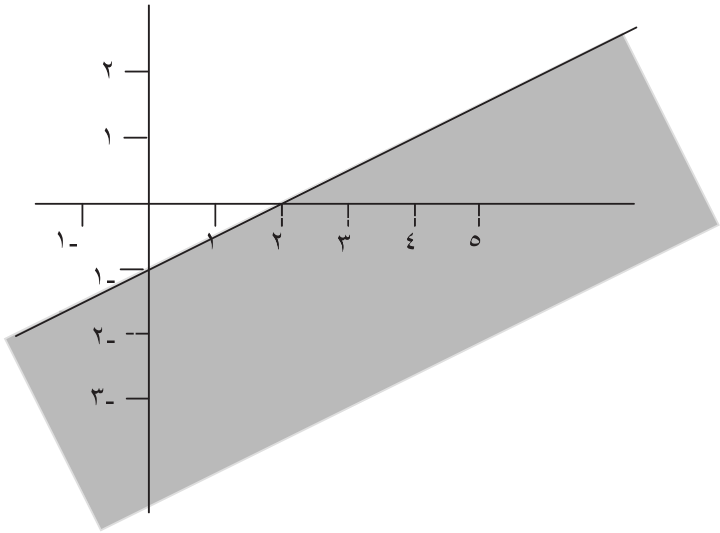
٢ص > ٣ – س   ص > $\frac{\text{٣ – س}}{\text{٢}}$

س	١ -	١	٣
ص	٢	١	٠

الجزء المظلل يمثل حل المتباينة



مثال ٤ : أرسم المتباينة س – ٢ص ≤ ٢



الحل

س – ٢ص ≤ ٢

- ٢ص ≤ ٢ - س

ص ≥ $\frac{\text{س} - ٢}{٢}$

س	٤	٢	٠
ص	١	٠	-١

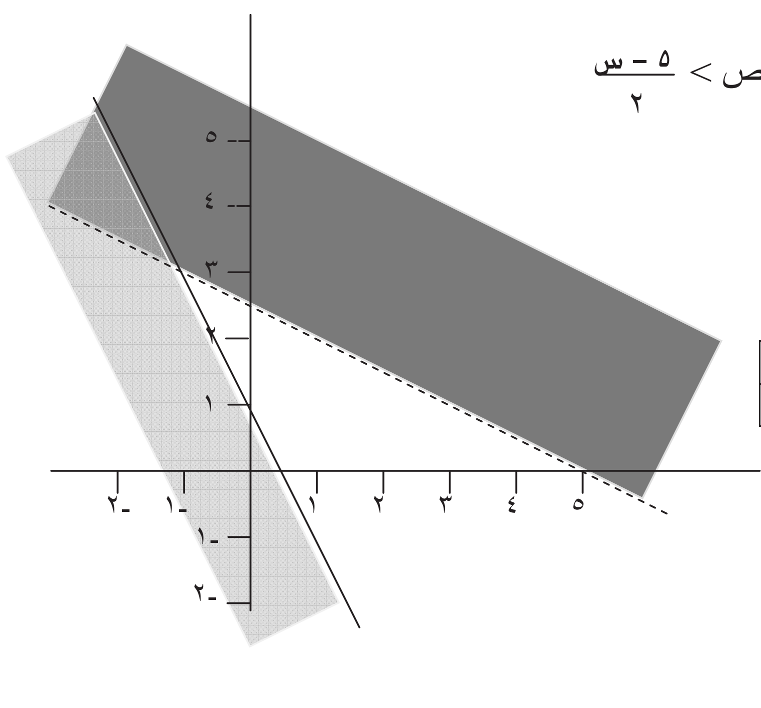
الجزء المظلل يمثل حل المتباينة

حل متباينتين من الدرجة الأولى فى مجهولين

خطوات الحل
١) نحدد نطاق حل المتباينة الأولى
٢) نحدد نطاق حل المتباينة الثانية
٣) المنطقة المشتركة بينهما تكون هى حل المتباينة

مثال ٥ : أوجد حل المتباينتين س + ٢ص > ٥ ، ٢س + ص ≥ ١

الحل



س + ٢ص > ٥

٢ص > ٥ - س　　　ص > $\frac{٥ - \text{س}}{٢}$

س	-١	١	٣
ص	٣	٢	١

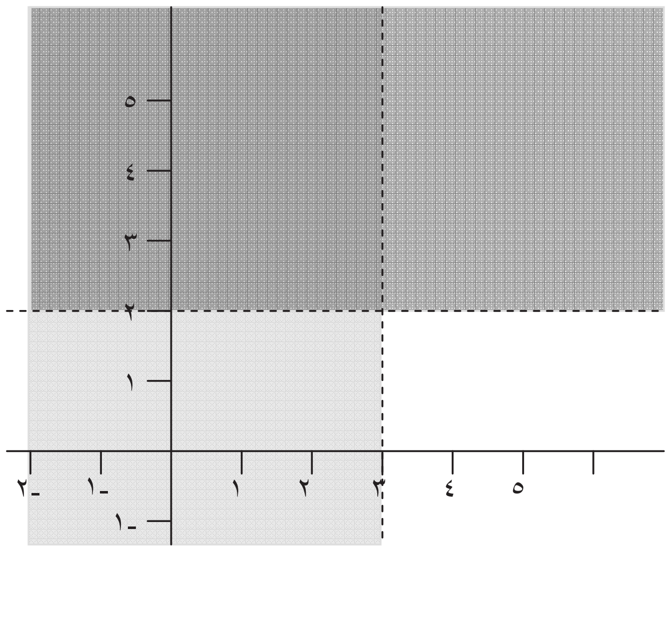
٢س + ص ≥ ١

ص ≥ ١ – ٢س

س	-١	٠	١
ص	٣	١	-١

النطاق المشترك يمثل حل المتباينة

مثال ٢ : حل المتباينتين س < ٣
، ص > ٢



الحل

س < ٣ نرسم س = ٣
و نحدد نطاق الحل

ص > ٢ نرسم ص = ٢
و نحدد نطاق الحل
النطاق المشترك هو حل المتباينة

تمارين

أوجد حل كل من المتباينات الآتية :

١) س + ٢ص > ١ ، س ≤ ١
٢) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ص > ٣ ، ٢س + ص < ٤
٣) ص ≤ ٢س + ٦ ، ص + ٣س ≥ - ١
٤) ص ≤ ٠ ، ٣س – ص < ٦ ، س + ص ≤ ٠
٥) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ص < س + ٣ ، س + ٢ص < ٤

البرمجة الخطية

نشأ هذا الفرع خلال الحرب العالمية الثانية لحل بعض المشاكل فى الحرب ثم استخدم بعد ذلك لحل مشاكل الصناعة و التجارة و اصبح هذا الفرع من الرياضيات يستخدم فى بحوث العميات و مشروعات التخطيط

مثال ١ :

مصنع ينتج حد أقصى ٩٠ وحدة من نوعين مختلفين من منتج . يربح ٥ جنيهات لكل وحدة من النوع الأول. و يربح ٧ جنيهات لكل وحدة من الوع الثانى. بشرط أن عدد الوحدات المنتجة من النوع الأول لا تقل عن ضعف المنتج من النوع الثانى. أوجد عدد الوحدات التى يمكن إنتاجها من كل من النوعين لتحقيق أكبر ربح ممكن.

الحل

	النوع الأول	النوع الثانى	الحد الأقصى
الوحدات المنتجة	س	ص	س + ص ≤ ٩٠
الربح	٥	٧	٥س + ٧ص

من الجدول السابق س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

س + ص ≤ ٩٠ ، س ≥ ٢ص

نرسم المتباينات الآتية

١) نرسم ل$_١$ س ≥ ٠

٢) نرسم ل$_٢$ ص ≥ ٠

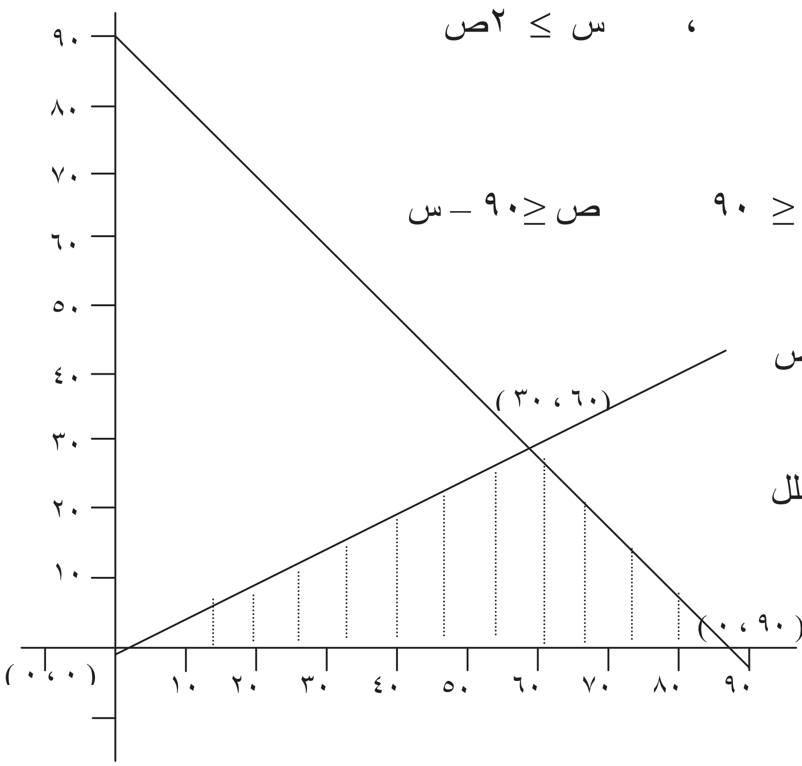
٣) نرسم ل$_٣$ س + ص ≤ ٩٠ ص ≤ ٩٠ – س

س	٠	٤٠	٩٠
ص	٩٠	٥٠	٠

٤) نرسم ل$_٤$ س ≥ ٢ص

س	٠	٤٠	٦٠
ص	٠	٢٠	٣٠

نطاق حل المتباينة الجزء المظلل المحصور بين (٠ ، ٠) ، (٩٠ ، ٠) ، (٦٠ ، ٣٠)



عند (٠ ، ٠)   الربح = ٥س + ٧ص = ٥(٠) + ٧(٠) = ٠
عند (٩٠ ، ٠)   الربح = ٥س + ٧ص = ٥(٩٠) + ٧(٠) = ٤٥٠
عند (٦٠ ، ٣٠)   الربح = ٥س + ٧ص = ٥(٦٠) + ٧(٣٠) = ٥١٠
∴ لتحقيق أقصى ربح يتم إنتاج عدد ٦٠ وحدة من النوع الأول ، ٣٠ وحدة من النوع الثانى

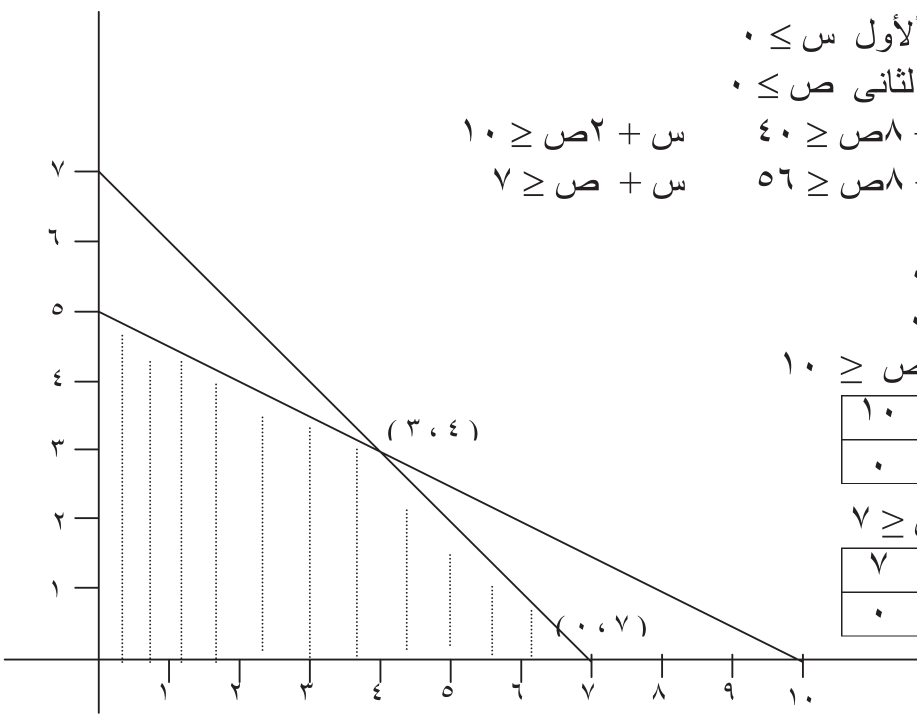
مثال ٢:

مصنع حلوى يستهلك ٤٠ كجم من الدقيق و ٥٦ كجم من السكر لإنتاج نوعين من الحلوى. النوع ألأول يحتاج ٤ كجم من الدقيق ، ١٢ كجم من السكر بينما النوع الثانى يحتاج ٨ كجم من الدقيق ، ٨ كجم من السكر. فإذا علم أن ربح النوع ألأول ٢٥ جنيها و ربح النوع الثانى ٤٥ جنيها. أوجد عدد الوحدات الممكن ُنتاجها من كل نوع لتحقيق أقصى ربح ممكن بفرض أن المصنع باع كل إنتاجه.

الــحــل

	النوع ألأول (س)	النوع الثانى (ص)	ألإجمالى
الدقيق	٤	٨	٤٠
السكر	٨	٨	٥٦
الربح	٢٥	٤٥	٢٥س+٤٥ص

الكمية المنتجة من النوع ألأول س ≤ ٠
الكمية المنتجة من النوع الثانى ص ≤ ٠
الدقيق المستهلك   ٤س + ٨ص ≥ ٤٠   س + ٢ص ≥ ١٠
السكر المستهلك   ٨س + ٨ص ≥ ٥٦   س + ص ≥ ٧



١) نرسم ل١   س ≤ ٠
٢) نرسم ل٢   ص ≤ ٠
٣) نرسم ل٣   س + ٢ص ≥ ١٠

س	٠	٤	١٠
ص	٥	٣	٠

٤) نرسم ل٤   س + ص ≥ ٧

س	٠	٤	٧
ص	٧	٣	٠

حل المتباينة الجزء المظلل المحصور بين (٠ ، ٠) ، (٧ ، ٠) ، (٤ ، ٣) ، (٠ ، ٥)
عند (٠ ، ٠) الربح = ٢٥س + ٤٥ص = ٢٥(٠) + ٤٥(٠) = ٠
عند (٧ ، ٠) الربح = ٢٥س + ٤٥ص = ٢٥(٧) + ٤٥(٠) = ١٧٥
عند (٤ ، ٣) الربح = ٢٥س + ٤٥ص = ٢٥(٤) + ٤٥(٣) = ٢٣٥
عند (٠ ، ٥) الربح = ٢٥س + ٤٥ص = ٢٥(٠) + ٤٥(٥) = ٢٢٥
لتحقيق أقصى ربح يتم إنتاج عدد ٤ منتج من النوع أول ، ٣ منتج من النوع الثانى

مثال ٣:

ترغب مدرسة فى أن تقدم وجبات غذائية لتلاميذها تتكون من صنفين. الصنف الأول يحتوى على وحدة واحدة بروتين ، وحدتين فيتامين. و الصنف الثاني يحتوى على ٣ وحدات بروتين ، وحدة فيتامين. ثمن القطعة من الصنف الأول ١٢ قرش ، ثمن القطعة من الصنف الثانى ١٨ قرش. إذا كان التلميذ يحتاج على الأقل ١٢ وحدة بروتين ، ٩ وحدات فيتامين. أوجد عدد الوحدات التى يمكن تقديمها من كل صنف فى الوجبة الواحدة بحيث يحصل الطالب على الحد ألأدنى من البروتينات و الفيتامينات بأقل تكلفة.

الحـــل

	النوع الأول (س)	النوع الثانى (ص)	المطلوب
البروتين	١	٣	١٢
الفيتامين	٢	١	٩
التكلفة	١٢	١٨	١٢س + ١٨ص

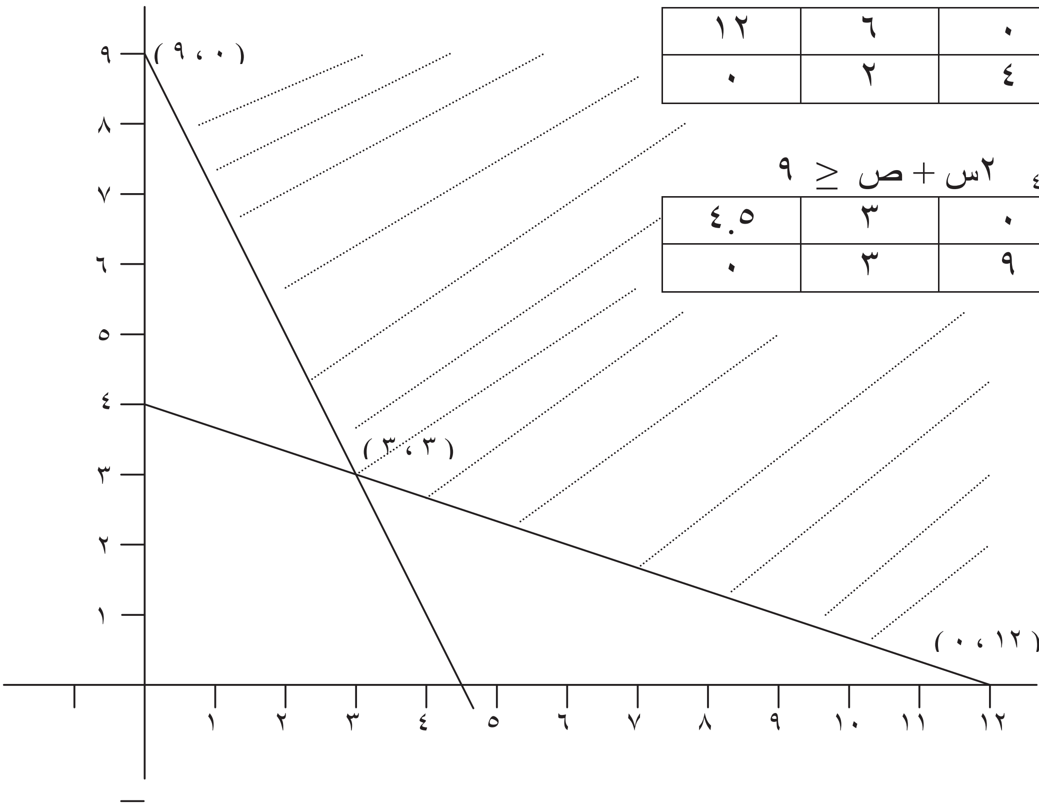
عدد الوحدات من الصنف ألأول س ≤ ٠
عدد الوحدات من الصنف ألثانى ص ≤ ٠
البروتين المطلوب س + ٣ص ≥ ١٢
الفيتامين المطلوب ٢س + ص ≥ ٩
التكلفة المطلوبة = ١٢س + ١٨ص

١) نرسم ل$_{١}$ س ≤ ٠
٢) نرسم ل$_{٢}$ ص ≤ ٠
٣) نرسم ل$_{٣}$ س + ٣ص ≥ ١٢

س	٠	٦	١٢
ص	٤	٢	٠

٤) نرسم ل$_{٤}$ ٢س + ص $\geq$ ٩

س	٠	٣	٤.٥
ص	٩	٣	٠



نطاق الحل المحصور بين (١٢ ، ٠) ، (٣ ، ٣) ، (٠ ، ٩)
عند النقطة (١٢ ، ٠) التكلفة = ١٢س + ١٨ ص = ١٢(١٢) + ١٨(٠) = ١٤٤
عند النقطة (٣ ، ٣) التكلفة = ١٢س + ١٨ ص = ١٢(٣) + ١٨(٣) = ٩٠
عند النقطة (٠ ، ٩) التكلفة = ١٢س + ١٨ ص = ١٢(٠) + ١٨(٩) = ١٦٢
للحصول على الوجبة المطلوبة بأقل تكلفة هو تقديم وجبة تحتوة ٣ وحدات من الصنف الأول ، ٣ وحدات من الصنف الثانى.

تمــاريـــن

١) مصنع محدود للملابس الجاهزة ينتج نوعين من الفساتين النوع الأول يحتاج ٢ متر حرير ، ١ متر كتان. و النوع الثانى يحتاج ١ متر حرير ، ٢ متر كتان. إذا كان المصنع يستهلك ٧ متر حرير ، ٨ متر كتان. و يربح من النوع الأول ٢٠ جنيها و من النوع الثانى ١٦ جنيها. أوجد عدد الوحدات التى يمكن إنتاجها من كل نوع لتحقيق أكبر ربح

٢) مصنع ينتج نوعين من القمصان الأول يحتاج ١ متر قماش + ٤ ساعات عمل و يباع بمكسب ١٥ جنيها. و النوع الثانى يحتاج ١.٥ متر قماش + ساعتين عمل و يباع بمكسب ١٠ جنيهات. وكانت ساعات العمل المتاحة للمصنع ٤٠٠ ساعة. أوجد الكمية الممكن إنتاجها من كل نوع لتحقيق أكبر ربح.

٣) ورشة للأثاث تنتج نوعين من الأثاث المكتبى يحتاج إلى نوعين من الماكينات أ ، ب. النوع ألأول يحتاج ٣ ساعات على الماكينة أ ، ساعتان على الماكينة ب. و النوع الثانى يحتاج ساعتان على الماكينة ا ، ٣ ساعات على الماكينة ب. و المصنع يربح ٣٠ جنيها فى النوع ألأول ، ١٨ جنيها فى النوع الثانى. أوجد عدد الكميات الممكن إنتاجها من كل نوع لتحقيق أكبر ربح علما بأن كل ماكينة تعمل بحد أقصى ١٥ ساعة فى اليوم.

الدوال المثلثية

Trigonometric functions

نتعرض فى هذا الباب إلى نوع هام من الدوال غير الجبرية وهى (الدوال المثلثية)حيث يتم تعريفها بواسطة أضلاع مثلث قائم الزاوية – فى دائرة الوحدة – *ولهذا فإن هذه الدوال تسمى أحيانا بالدوال الدائرية.*

وترجع أهمية الدوال المثلثية (الدائرية) إلى كونها تستخدم فى علوم الإتصالات و الكهرباء وعلوم الصوتيات والمرئيات وغيرها من العلوم التكنولوجية المتطورة.

هذا والدوال المثلثية عددها ست دوال فقط بالإضافة إلى عدد ست دوال مثلثية أخرى عكسية.

الدوال المثلثية :- أنواعها وخصائصها

فى دائرة الوحدة (هى دائره يمثل مركزها إحداثى نقطة الأصل ونصف قطرها وحدة الأطوال)

نجد أن نقطة الأصل و (٠ ، ٠)

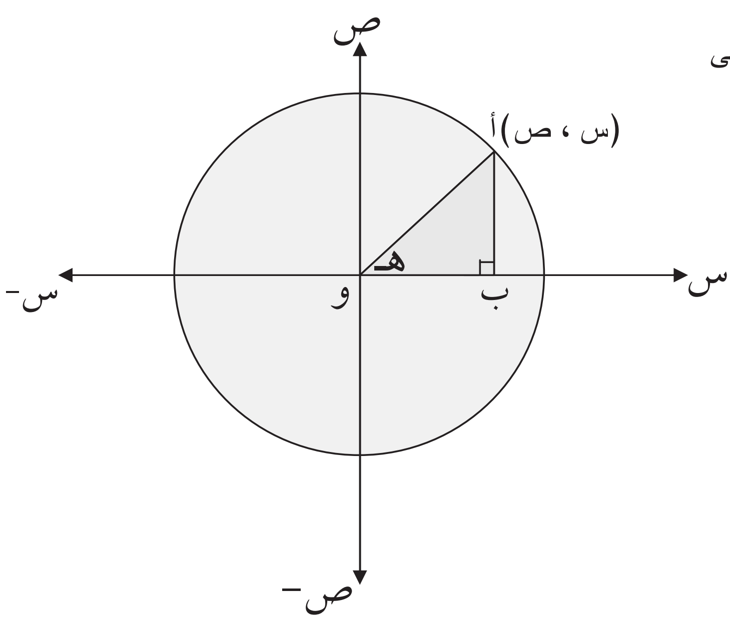
ونجد أن أ (س ، ص)

ومما سبق دراستة نعلم أن

جيب الزاوية هـ = جا هـ = إحداثى صادى

جيب تمام الزاوية هـ = جتا هـ = إحداثى سينى

وظل الزاوية هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = ظا هـ



وكما درسنا أيضا سابقا

قاطع تمام الزاوية هـ = قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$

قاطع الزاوية هـ = قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$

ظل تمام الزاوية هـ = ظتا هـ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$

والآن نتعرض لتفاضل الدوال المثلثية : -

نظـرية

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \text{ جا هـ = جتا هـ}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \text{ جتا هـ = – جا هـ}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \text{ ظا هـ = قا}^{٢} \text{ هـ}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \text{ جا (م س + ب) = م جتا (م س + ب)}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \text{ جتا (م س + ب) = – جا (م س + ب)}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \text{ ظا (م س + ب) = م قا}^{٢} \text{ (م س + ب)}$$

نتيجة (عموما)

$$\frac{ى}{ىس}\text{جا}\,[ى(س)] = \text{جتا}\,[ى(س)] - \text{دَ}(س)$$

$$\frac{ى}{ىس}\text{جتا}\,[ى(س)] = -\text{جا}\,[ى(س)] - \text{دَ}(س)$$

$$\frac{ى}{ىس}\text{ظا}\,[ى(س)] = \text{قا}^{2}\,[ى(س)] - \text{دَ}(س)$$

تذكر أن

$$\text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$$

$$\text{قاس} = \frac{1}{\text{جتاس}}$$

$$\text{ظتاس} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \frac{1}{\text{ظاس}}$$

$$\text{قتاس} = \frac{1}{\text{جاس}}$$

أمثــــــــلة

مثال (١) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل من الدوال الاتية

١) ص = جا (س^{٢} + ٣)   ٢) ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{١ - ٢جتا س}}$

الحل

١) ص = جا (س^{٢} + ٣)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتا (س^{٢} + ٣) . ٢ س

= ٢ س جتا (س^{٢} + ٣)

---

٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتا س(١-٢جتاس) -جا س (٢جا س)}}{\text{(١-٢ جتا س)}^{٢}}$

$= \frac{\text{جتاس -٢جتا}^{٢}\text{ س-٢جا}^{٢}\text{ س}}{\text{(١-٢ حتا س)}^{٢}}$

$= \frac{\text{جتا س- ٢ (جا}^{٢}\text{س + جتا}^{٢}\text{ س)}}{\text{(١ – ٢ جتا س)}^{٢}} = \frac{\text{جتا س – ٢}}{\text{(١ – ٢ جتا س)}^{٢}}$

مثال ٢) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للدالة ص = س . ظا (٤ س + ١)

الحل

ص = س . ظا (٤ س + ١)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$= ٤ س . قا^{٢} (٤ س + ١) + ظا (٤ س + ١)

مثال ٣)

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للدالة جتا ٣ ص = جا (٥ س + ٢)

الحل

جتا ٣ ص = جا (٥ س + ٢)

بإجراء التفاضل الضمني لطرفي المعادلة بالنسبة إلي س

(- جا ٣ ص) × (٣ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$) = ٥ جتا (٥ س + ٢) ← $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٥ جتا (٥ س + ٢)}}{\text{- ٣ جا ٣ ص}}$

تمـــارين (١)

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ للدوال الآتية

١) $ص = ٣ س^{٢}$ جتا س

٢) $ص = س^{٢} - س$ جا $\sqrt{س} + ١٠$

٣) $ص = س^{٣}$ جا س

٤) إذا كان ص = جا٢ س فأوجد قيمة $\frac{ءص}{ءس}$

عندما $س = \frac{ط}{6}$

٥) إذا كان ص = س جتا ٣ س فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

٦) إذا كان ص = س جا س + $\sqrt{س}$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

٧) إذا كان ص = جا ٢ س جتا س فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

٨) إذا كان $ص = \sqrt[٣]{س^{٢} + ٤س + ٦}$

فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

عندما س = ٣

٩) إذا كان $ص = \frac{س + ١}{(س - ٣)^{٢}}$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

١٠) إذا كان $ص = \frac{جا س}{س}$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

١١) إذا كان ص = جا س جتا س فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

١٢) إذا كان ص=س جا ٢س فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

١٣) إذا كان ص = س ظا ٣ س فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

١٤) إذا كانت ص + جا ٢ س = صفر فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

١٥) إذا كانت ص = س جا ٣ س فأوجد قيمة $\frac{ءص}{ءس}$

١٦) إذا كانت ص = س + س جتا ٢س فأوجد قيمة $\frac{ءص}{ءس}$

<u>* حساب التفاضل للدالة الضمنية</u>

لنأخذ $أ^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}$

يمكن تعريف دالتين من هذه العلاقة وهي :

$ص_{١} = \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}$

$ص_{٢} = - \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}$

كل من هاتين الدالتين يمكن إيجاد مشتقتها الأولي كما يلي :

$ص_{١}' = \frac{-س}{\sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}}$ ، $ص_{٢}' = + \frac{س}{\sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}}$

وهكذا فإن كلا من الدالتين تحقق العلاقة $ص' = \frac{-س}{ص}$

ويمكن الحصول علي هذه العلاقة مباشرة باشتقاق العلاقة الأصلية

$أ^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}$ بالنسبة للمتغير س كما يلي :

$. = ٢ س + ٢ ص ص'$

$\therefore ص' = \frac{-س}{ص}$

وتسمي هذه الطريقة الاشتقاق الضمني.

وهي تعطي المشتقة الأولي للدالة الضمنية بدلالة المتغيرين س ، ص

<u>أمثـــــــلة</u>

<u>مثال (١)</u>

أوجد $ص'$ إذا كان $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٠$

الحــل

باشتقاق كل من الطرفين

$٢ س + س ص' + ص + ٢ ص ص' = ٠$

$\therefore (س + ٢ ص) ص' + ٢ س + ص = ٠ \leftarrow \therefore ص' = \frac{-(٢ س + ص)}{(س + ٢ ص)}$

<u>مثال (٢)</u> أوجد $ص'$ من العلاقة

$أ س^{٢} + ٢ ب س ص + ٢ جـ ص^{٢} + ٢ هـ س + ٢ و ص + ل = ٠$

الحــل

باشتقاق كل من الطرفين $٢ أ س + ٢ ب (س ص' + ص) + ٤ جـ ص ص' + ٢ هـ + ٢ و ص' = ٠$

أ س + ب ص + هـ + (ب س + ٢ج ص + و) ص$'$ = ٠

$$ص' = \frac{-\left(أ\,س + ب\,ص + هـ\right)}{\left(ب\,س + جـ\,ص + و\right)}$$

==

تمـــارين٢

١) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت س^{٢} – س ص + ص^{٢} = ٣

٢) إذا كانت س = (ص^{٢} – ١)^{٦} فإثبت أن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص^{٢} - ١}{١٢\,س\,ص}$

٣) في الدالة س^{٤} + س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} = ٢

أثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = –٣ عندما س = ٢ ، ص = ١

٤) إذا كان س ص – س^{٢} + ٢ = ٠ أوجد تفاضل الدالة

٥) إذا كان س ص = ظا س أوجد تفاضل الدالة

٦) إذا كان س^{٣} + ص^{٣} = ١ أوجد تفاضل الدالة

٧) إذا كان ٦ ص^{٢} + ٣ س – ص^{٣} = ٢٦ أوجد تفاضل الدالة

٨) أوجد تفاضل الدالة س^{٥} + س ص – ٢ ص^{٢} = ٤

٩) إذا كان ٢ ص^{٣} + ٢ س^{٣} – س + ٣ ص + ٥ = صفر فأوجد تفاضل الدالة

١٠) إذا كان س^{٢} ص + س^{٤} ص + ٣ = صفر أوجد تفاضل الدالة

* المشتقات العليا

كما رأينا فإن المشتقة الأولي صَ للدالة ص هي دالة جديدة في المتغير صَ قد تقبل الاشتقاق مرة ثانية لتعطي ما يعرف بالمشتقة الثانية

ص″ = (ص′)′

وهذه بدورها قد تقبل الإشتقاق مرة ثالثة لتعطي

ص‴= (ص″)′ وهكذا

وعموما إذا كانت ص = د (س) قابلة للإشتقاق فإن:

صَ= د′ (س) = $\frac{ءص}{ءس}$ (المشتقة الأولي)

ص″ = د″ (س) = $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ (المشتقة الثانية)

ص‴ = د‴ (س) = $\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}}$ (المشتقة الثالثة)

.... وهكذا؛

أمثـــــلة

مثال (١)

أوجد المشتقة الثالثة للدالة

ص = ٣ س^{٢} + جا (٢ س + ٥)

الحـــل

ص = ٣ س^{٢} + جا (٢ س + ٥)

صَ= ٦ س + ٢ جتا (٢ س + ٥)

ص″= ٦ – ٤ جا (٢ س + ٥)

ص‴= – ٨ جتا (٢ س + ٥)

مثال (٢) أوجد المشتقة الثانية لكل من الدوال الآتية :

(١) ص = $\frac{س^{٣} - ١}{س^{٢} + س + ١}$ (٢) ص = ٢ جا (٣ س + ١)

الحـــل

١) ص = $\frac{س٣ - ١}{س٢ + س + ١}$ ← ص = $\frac{(س - ١) (س٢ + س + ١)}{س٢ + س + ١}$ = س – ١

صَ= ١ ← ص″ = صفر

مثال ٢

الحـــل

٢) ص = ٢ جا (٣ س + ١)

ص َ = ٦ جتا (٣ س + ١)

ص ً = − ١٨ جا (٣ س + ١)

===

تمـــــارين٣

أوجد المشتقة الثانية لكل مما يأتي :

١) ص = س^{٣} − ٣ س^{٢} +٢

٢) ص = (٢ س + ٣)^{٢}

٣) ٣ س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٥

٤) س^{٣} − ص^{٣} = ١

تطبيقات التفاضل : إيجاد الميل المماس لمنحني ومعادلة المماس للمنحني

١) ميل المماس لمنحني عند نقطة ما (س١ ، ص١) واقعة عليه :

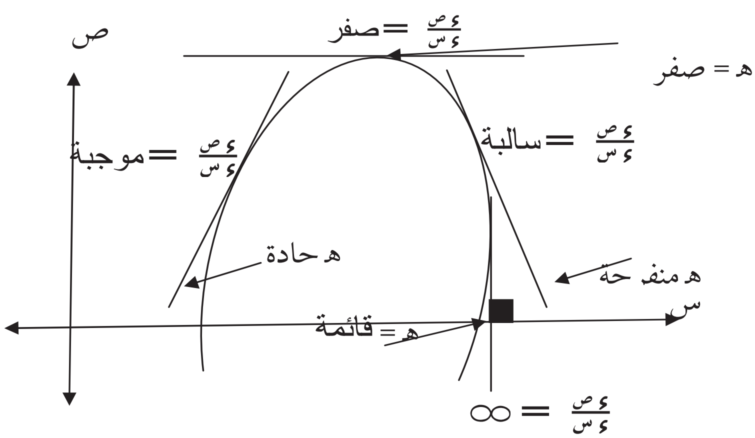
إذا كانت ص = د (س) فإن :

م = ميل المماس للمنحني عند النقطة (س١ ، ص١) = $[\frac{ءص}{ءس}]_{(س١ ، ص١)}$ = ظا هـ

حيث هـ هي الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور س عكس اتجاه عقارب الساعة.

ويكون

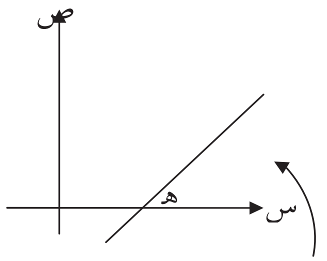
$[\frac{ءص}{ءس}]_{(س١ ، ص١)}$
- = صفر إذا كان المماس يوازي محور السينات
- = مقدارا موجبا إذا كان المماس يضع زاوية حادة مع محور السينات
- = مقدارا سالبا إذا كان المماس يصنع زاوية منفرجة مع محور السينات
- = ∞ إذا كان ⊥ محل السينات (// محور الصادات)



ملاحظات هامة :

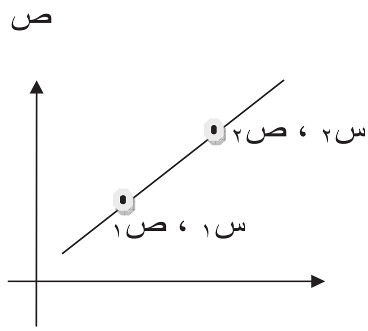
١) يمكن إيجاد ميل خط مستقيم في الحالات الآتية :

أ- إذا علم زاوية ميله علي محور س ولتكن هـ فيكون الميل م = ظا هـ



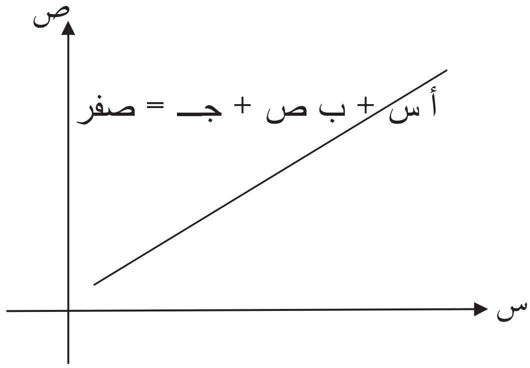
ب) إذا علم نقطتين عليه (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

فيكون الميل م = $\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$



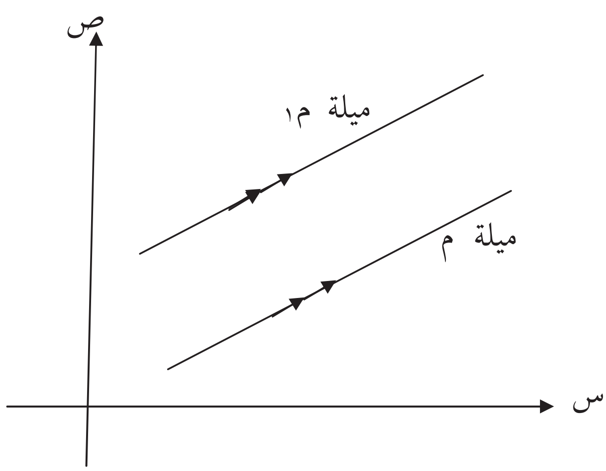
جـ– إذا علم معادلة هذا الخط في الصورة العامة أ س + ب ص + جـ = صفر

فيكون الميل م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$



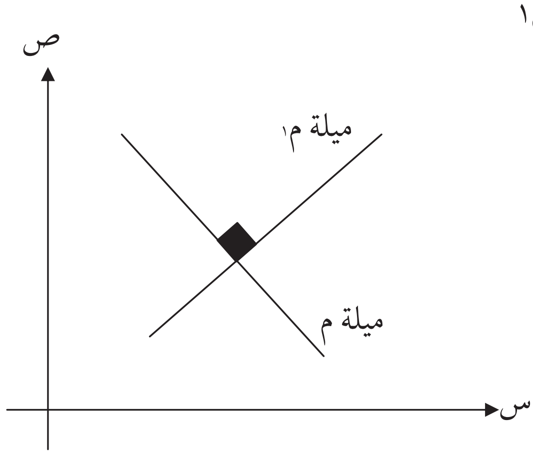
======================================

د – إذا وازي مستقيم معلوم ميله م١ فيكون م = م١



=====================================

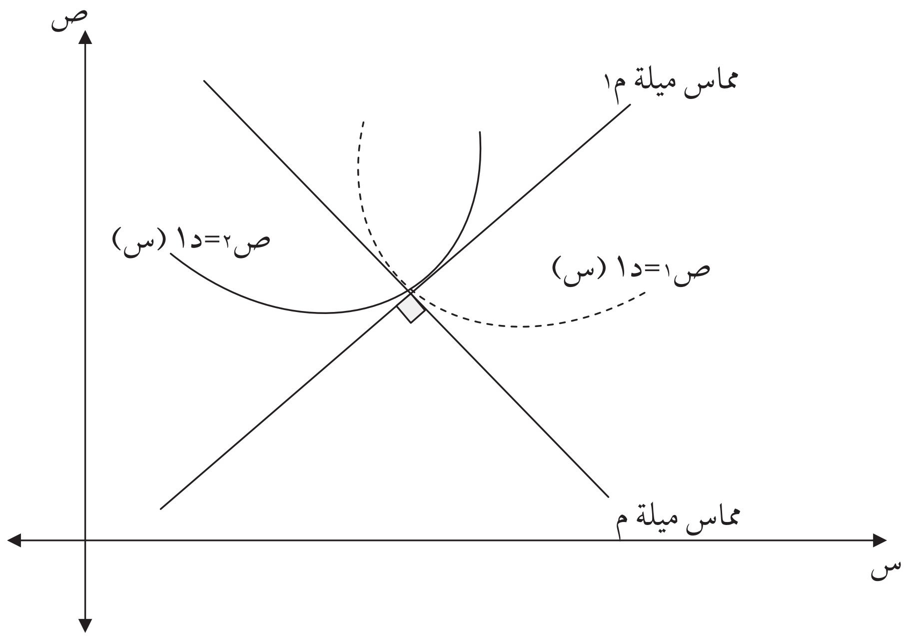
و – إذا تعامد علي مستقيم معلوم ميله م١ فيكون م = $\frac{-1}{\text{م}_1}$



(ب) المنحنين د$_{1}$ (س) ، د$_{2}$ (س) يتقاطعان علي التعامد إذا تعامد المماسان لهما عند نقطة تقاطعهما

شرط التعامد :

م$_{1}$ م$_{2}$ = −١



أمثـــــلة

مثال ١) أوجد ميل المماس للمنحني ص = (س − ١) (س + ٢) (س − ٣) عند نقط تقاطعـــه مـــع محور السينات

الحـــل

لإيجاد نقط تقاطع المنحني مع محور السينات نضع ص = صفر في معادلة المنحني

(س − ١) (س + ٢) (س − ٣) = ٠

س = ١ أو س = − ٢ أو س = ٣

∴ نقط التقاطع هي :

(−٢ ، ٠) ، (١ ، ٠) ، (٣ ، ٠)

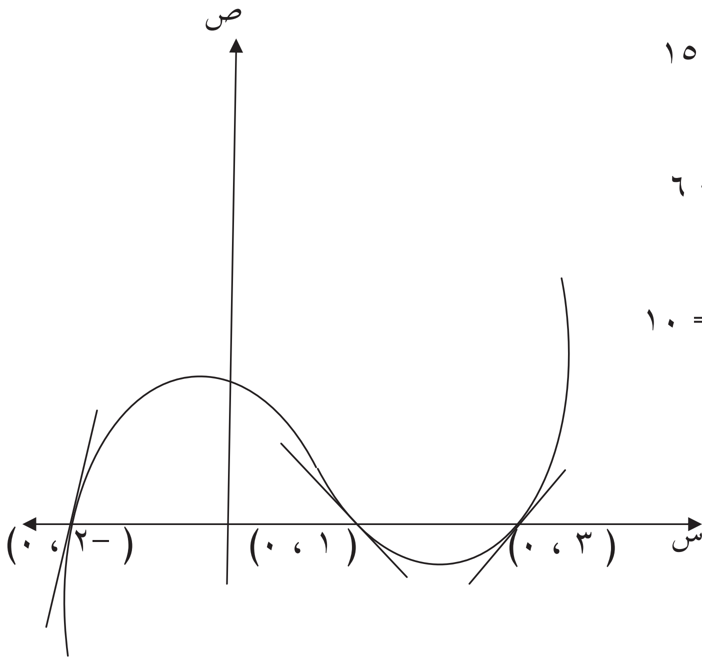
ص = (س − ١) (س + ٢) (س − ٣)

$\frac{ءص}{ءس}$= (س − ١) (س + ٢) (١) + (س − ١) (س − ٣) (١) + (س + ٢) (س − ٣) (١)

= س^{2} + س − ٢ + س^{2} − ٤ س + ٣ + س^{2} − س − ٦

= ٣ س^{2} − ٤ س − ٥

عند النقطة (−٢ ، ٠)



ميل المماس = [ءص/ءس] = ١٢ + ٨ – ٥ = ١٥

عند النقطة (١ ، ٠)

ميل المماس = [ءص/ءس]= ٣ – ٤ – ٥ = – ٦

عند النقطة (٣ ، ٠)

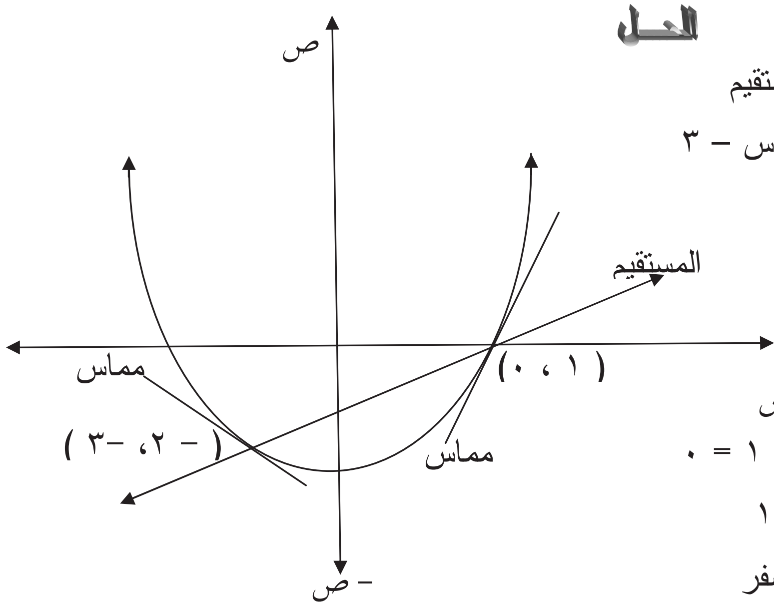
ميل المماس = [ءص/ءس] = ٢٧ – ١٢ – ٥ = ١٠

==============================

<u>مثال ٢)</u>

أوجد ميل المماس للمنحني ص = س^{٢} + ٢ س – ٣ عند نقط تقاطعه مع المستقيم ص = س – ١

الحـــل



لإيجاد نقط تقاطع المنحني مع المستقيم

نحل معادلة المنحني ص = س^{٢} + ٢ س – ٣

مع معادلة المستقيم ص = س – ١

س^{٢} + ٢ س – ٣ = س – ١

س^{٢} + س – ٢ = ٠

(س + ٢) (س – ١) = ٠

س + ٢ = صفر أو س – ١ = ٠

س = –٢ أو س = ١

ص = –٣ ص = صفر

∴ نقطة التقاطع هي (– ٢، –٣) ، (١ ، ٠)

* معادلة المنحني ص = س^{٢} + ٢ س – ٣

[ءص/ءس] = ٢ س + ٢

عند النقطة (−٢ ، −٣)

ميل المماس = $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(-٢، -٣)}$ = ٢ (−٢) + ٢= −٢

عند النقطة (١ ، ٠)

ميل المماس = $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(١ ، ٠)}$ = ٢ (١) + ٢ = ٤

==============================

<u>مثال٣)</u>

أوجد النقط علي المنحني ص = $\frac{١ - ٢\text{ س}}{\text{س} - ٢}$ التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم

٣ س − ص = صفر

الحـــــــــل

* معادلة المستقيم الموازي للمماس

٣ س − ص = صفر

ميله = $\frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٣}{-١}$ = ٣

* معادلة المنحني

ص = $\frac{١ - ٢\text{ س}}{\text{س} - ٢}$

$\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]$ = $\frac{(\text{س}-٢)\ (-٢) - (١-٢\text{س})\ (١)}{(\text{ س} - ٢)^{٢}}$ = $\frac{٣}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$

ميل المماس | عند نقطة التماس = $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]$ = ميل المستقيم الموازي له

∴ $\frac{٣}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$ = ٣

$(\text{س} - ٢)^{٢}$ = ١ ← س − ٢ = ± ١

س = ١ أو س = ٣

ص = ١ أو ص = − ٥

النقط هي : (١ ، ١) ، (٣ ،٥)

مثال٤) أثبت أن المنحنيين ص = ٢ س^{٢} – ٣ س + ٨

ص = س^{٢} – ٣ س +٩

يتقاطعان علي التعامد عند النقطة (١ ، ٧)

الحـــل

بوضع س = ١ في معادلة المنحني الأول

ص = ٢ س^{٢} – ٣ س + ٨

ص = ٢ (١)^{٢} – ٣ (١) + ٨ = ٧

∴ النقطة (١ ، ٧) تحقق المعادلة المنحني الأول

بوضع س = ١ في معادلة المنحني الثاني

ص = س^{٢} – ٣ س + ٩

ص – (١)^{٢} – ٣ (١) + ٩ = ٧

∴ النقطة (١، ٧) تحقق معادلة المنحني الثاني

∴ النقطة (١، ٧) هي نقطة تقاطع المنحنيين.............. (١)

* معادلة المنحني الأول ص = ٢ س^{٢} – ٣ س + ٨

$\left[\frac{ءص}{ءس}\right]$= ٤ س – ٣

م$_{١}$ = ميل المماس للمنحني الأول = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(١ ، ٧)}$ = ٤ (١) –٣ = ١

* معادلة المنحني الثاني ص = س^{٢} – ٣ س + ٩

$\left[\frac{ءص}{ءس}\right]$ = ٢ س – ٣

م$_{٢}$ = ميل المماس للمنحني الثاني = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(١ ، ٧)}$= ٢(١) – ٣ = – ١

∴ م$_{١}$ م$_{٢}$ = ١ × (–١) = –١

∴ المماسان متعامدان...............(٢)

من (١)....(٢) ∴ المنحنيان يتقاطعان علي التعامد.

*معادلة المماس والعمودي للمنحني عند نقطة واقعة عليه ولتكن (س١ ، ص١)

إذا كانت ص = د (س) فإن :

* م = ميل المماس للمنحني عند النقطة (س١ ، ص١)

$= \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س١،ص١)}$

معادلة المماس :ص – ص١ = م (س – س١)

* م١ = ميل العمودي للمنحني عند النقطة (س١ ، ص١) = $\frac{-١}{م}$

معادلة العمودي : ص – ص١ = م١ (س – س١)

أمـــــــــثلة

مثال١):

أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي للمنحني

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س – ٣ ص + ٢ = صفر عند النقطة (–٢، ١)

الحـــل

* نقطة التماس : (س١ ، ص١) = (–٢ ، ١)

* معادلة المنحني : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س – ٣ ص + ٢ = صفر

بإجراء التفاضل الضمني لطرفي المعادلة بالنسبة إلي س

٢ س + ٢ ص $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]$+ ٢ – ٣ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]$= صفر

$\left[\frac{ءص}{ءس}\right]$ (٢ ص – ٣) = – ٢ س – ٢

$\left[\frac{ءص}{ءس}\right] = \frac{-٢ (س + ١)}{٢ص - ٣}$

∴ م= ميل المماس = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(-٢ ، ١)}$ = $\frac{-٢ (-٢ + ١)}{٢ (١) - ٣}$ = $\frac{٢}{-١}$ = –٢

معادلة المماس : ص – ص١ = م (س – س١)

ص – ١ = –٢ (س + ٢)

٢ س + ص + ٣ = صفر

معادلة العمودي :

ص – ص١ = م١ (س – س١) ← ص – ١ = $\frac{١}{٢}$ (س + ٢)

٢ ص – ٢ = س + ٢ ← س –٢ ص + ٤ = صفر

مثال٢) أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي للمنحني

ص = ن^{٣} – ٢٤ ، س = ن^{٢} – ٧ عند ن = ٣

الحـــل

ص = ن^{٣} – ٢٤ ، س = ن^{٢} – ٧

ص$_{١}$ = (ن^{٣} – ٢٤) |$_{ن = ٣}$ = ٢٧ – ٢٤ = ٣

س$_{١}$ = (ن^{٢} – ٧) |$_{ن = ٣}$ = ٩ – ٧ = ٢

نقطة التماس (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) = (٢ ، ٣)

* معادلة المنحني ص = ن^{٣} – ٢٤ ، س = ن^{٢} – ٧

$$\left[\frac{ءص}{ءس}\right] = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٣ن^{٢}}{٢ن} = \frac{٣}{٢}ن$$

* م = ميل المماس = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{ن=٣} = \frac{٣}{٢}\ (٣) = \frac{٩}{٢}$

معادلة المماس ص – ص$_{١}$ = م (س – س$_{١}$)

ص – ٣ = $\frac{٩}{٢}$(س – ٢)

٩س – ٢ ص – ١٢ = صفر

م$_{١}$ = ميل العمودي = $\frac{-١}{م} = \frac{-١}{(\frac{٩}{٢})} = \frac{-٢}{٩}$

معادلة العمودي ص – ص$_{١}$ = م$_{١}$ (س – س$_{١}$) ← ص – ٣ = $\frac{-٢}{٩}$ (س–٢)

∴ ٢ س + ٩ ص – ٣١ = صفر

=================================

مثال٣) أثبت أن المنحنيين ص = س^{٢} – س + ٢

ص = ٣ س – س^{٢} متماسان

ثم أوجد معادلة المماس المشترك لهما

الحل

بحل معادلة المنحنيين ص = س^{٢} – س + ٢

ص = ٣ س – س^{٢}

س^{٢} – س + ٢ = ٣ س – س^{٢}

٢س^{٢} – ٤ س + ٢ = ٠

س^{٢} – ٢ س + ١ = ٠

$(س - ١)^٢ = ٠$ $\quad\quad$ س = ١

ص = ٢

∴ المنحنيان يتقاطعان في النقطة (١ ، ٢) ....(١)

* معادلة المنحني الأول ص = $س^٢$ – س + ٢

$\left[\frac{ءص}{ءس}\right]$=٢ س – ١

$م_١$ = ميل المماس للمنحني الأول = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(١ ، ٢)}$ = ٢ (١) – ١ = ١

* معادلة المنحني الثاني ص = ٣ س – $س^٢$

$\left[\frac{ءص}{ءس}\right]$ = ٣ – ٢س

$م_٢$ = ميل المماس للمنحني الثاني = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(١ ، ٢)}$ = ٣– ٢(١) = ١

∴ $م_١$ = $م_٢$.................(٢)

من ....(١) (٢) المنحنيان متماسان عند النقطة (١ ، ٢)

* معادلة المماس المشترك

ص– $ص_١$ = م (س – $س_١$)

ص – ٢ = ١ (س –١)

س – ص + ١ = صفر

================================

تمارين٤

(١) أوجد ميل المماس لمنحني الدالة ص = س − $\frac{٢}{س}$ عند س = ١

(٢) أوجد النقط الواقعة علي المنحني :

ص = س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٩ س + ٦ والتي يكون ميل المماس عندها يساوي صفر

(٣) أوجد ميل المماس للمنحني : ص = $\frac{س^{٢}+س+١}{}$ عند س = ١

(٤) أوجد النقط الواقعة علي المنحني ص = $\frac{س-٢}{}$ والتي يكون عندها المماس للمنحني موازيا للمستقيم ص = س + ٤

(٥) إذا كان المماس للمنحني ص = ب س^{٣} − س + ٣ عند س = − ١ عموديا علي المستقيم ص = − $\frac{١}{٥}$ س + ١ فأوجد قيمة : ب

(٦) أوجد معادلة المماس للمنحني : ص = س^{٢} − س^{٣} عند النقطة (١ ، ٠)

(٧) أوجد النقط علي المنحني ص = ٣ س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٣ س − ٢ والتي يكون المماس عندها موازيا لمحور السينات.

(٨) أوجد النقط الواقعة علي المنحني ص = س^{٣} − ٢ س^{٢} − ٩ س + ٦ والتي يكون عندها المماس للمنحني موازيا لمحور السينات.

(٩) أوجد معادلة المماس للمنحني ص = س^{٢} − ٣ س^{٢} + ٢ عند النقطة (١ ، ٠) الواقعة علي المنحني .

(١٠) أوجد النقط الواقعة علي منحني الدالة: ص = س^{٢} − ٣ س^{٣} والتي يكون عندها ميل المماس للمنحني يساوي صفرا.

(١١) إذا كان ميل المماس للمنحني ص = (٣ س + أ)^{٢} عند س = ١ هو ٢٤

فأوجد قيمة أ ثم أوجد معادلة المماس للمنحني عند نقطة تقاطعه علي محور الصادات.

(١٢) إذا كان المماس للمنحني الدالة ص = أ س^{٢} + ب س عند النقطة (−١، ٢)

يوازي محور السينات ، فأوجد قيمتي أ ، ب ثم أوجد معادلة المماس للمنحني عند هذه النقطة.

التكــــــامل

تمهيد

نعلم أن عملية الطرح هي العملية الحسابية العكسية لعملية الجمع وأيضا فإن عملية القسمة هي العمليــة العكسية للضرب وكذلك فإن التكامل هو العملية العكسية للتفاضل .

وهو العملية التي بواسطتها نحصل علي الدالة التفاضلية الأصلية عن طريق معرفة مشتقاتها.

فإذا كان لدينا الدالة : ص = س^{٣}

فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س^{٢}

ولكن لنفترض أنه لدينا $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س^{٢} فإنه باستخدام التكامل يمكننا إيجاد الدالة الأصلية وهي ص .

وهنا سنكتب بالطريقة الآتية : ص =$\int$ (٣ س^{٢}) د س = س^{٣}

وتقرأ تكامل ٣ س^{٢} بالنسبة لـــ س

*** التكامل غير المحدود Indefinite Integral :**

في المثال السابق كان لدينا $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س^{٢}

وهي قد تكون المشتقة التفاضلية لأكثر من دالة فقد تكون الدالة الأصلية ص = س^{٣}

أو ص = س^{٣} – ٥ أو ص = س^{٣} + ٨

وذلك لأن المشتقة الأولي للمقدار الثابت = صفر وحيث أننا لا نعلم هنا المقدار الثابت الذي قد تحتــوي عليه الدالة ص عند إجراء التكامل لذلك فإننا نكتب :

$\int$ (٣ س^{٢}) د س = س^{٣} + ث

حيث ث يسمي ثابت التكامل (ث) ويسمي التكامل في هذه الحالة بالتكامل غير المحدود.

ويشمل الجانب الأيمن : علاقة التكامل ($\int$) ، د (س) وهو يعني أن التكامل بالنسبة للمتغيــر س أمــا الطرف الأيسر فيشمل : ناتج التكامل + ثابت التكامل.

ويمكن كتابة التكامل السابق كما يلي :

$\int$ (٣ س^{٢}) د س = د (س) + ث

* القواعد الأساسية للتكامل

قاعدة(١) $\int$ أ ء س = أ س + ك

حيث ك هي ثابت التكامل وإذا كانت أ = ١ فتكتب القاعدة :

$\int$ ء س = س + ك

وتختص هذه القاعدة بالتكامل الثابت

أمثـــــــلة

مثال (١) :

أوجد : (أ) $\int$ ٥ء س (ب) $\int$ − ١٠ ء س

الحــل

(أ) $\int$ ٥ ء س = ٥ س + ك

(ب) $\int$ −١٠ء س = − ١٠ س + ث

==================================

قاعدة(٢) $\int$ أ س^{ن}ء س = $\dfrac{\text{أ س}^{\text{ن+١}}}{\text{ن + ١}}$ + ك حيث ن ≠ − ١

وتختص هذه القاعدة بتكامل حد جبري مرفوع لقوة أسية وله معامل

مثال (٢) :

أوجد : (أ) $\int$ س ء س

(ب) $\int$ س^{٢} ء س

(ج) $\int$ س$^{-٣}$ ء س

الحــل

(أ) $\int$ س ء س = $\dfrac{\text{س}^{\text{١+١}}}{\text{١ + ١}}$ + ك = $\dfrac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + ك

(ب) $\int$ س^{٢} ء س = $\dfrac{\text{س}^{\text{٢+١}}}{\text{٢ + ١}}$ + ك

= $\dfrac{\text{س}^{٣}}{٣}$ + ك

(ج) $\int$ س$^{-٣}$ ء س = $\dfrac{\text{س}^{\text{-٣+١}}}{\text{-٣ + ١}}$ + ك

= $\dfrac{\text{س}^{-٢}}{-٢}$ + ك

==

قاعدة (٣) $\int$ ك د (س) ء س = ك $\int$ د (س) ء س

وهذه القاعدة خاصة بتكامل الحد الثابت المضروب في الدالة.

<u>مثال (٣) :</u>

أوجد: (أ) $\int$ ٦ س^{٢} ء س

(ب) $\int$ ١٥ س$^{-٤}$ ء س

(ج) $\int$ $\frac{١}{٤}$ س$^{-\frac{١}{٣}}$ ء س

الحل

(أ) $\int$ ٦ س^{٢} ء س = ٦ $\int$ س^{٢} ء س = ٦ $\left(\frac{\text{س}^{٣}}{٣}\right)$ + ث = ٢ س^{٣} + ث

(ب) $\int$ ١٥ س$^{-٤}$ ء س = ١٥ $\int$ س$^{-٤}$ ء س = ١٥ $\left(\frac{\text{س}^{-٣}}{-٣}\right)$ + ث = − ٥ س$^{-٣}$ + ث

(ج) $\int$ $\frac{١}{٤}$ س$^{-\frac{١}{٣}}$ ء س = $\frac{١}{٤}$ $\int$ س$^{-\frac{١}{٣}}$ ء س = $\frac{١}{٤}$ $\left(\frac{\text{س}^{-\frac{١}{٣}+١}}{-\frac{١}{٣}+١}\right)$ + ث

= $\frac{١}{٤}$ $\left(\frac{\text{س}^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}}\right)$ + ث

= $\frac{١}{٤}$ × $\frac{٣}{٢}$ (س$^{\frac{٢}{٣}}$) + ث = $\frac{٣}{٨}$ س$^{\frac{٢}{٣}}$ + ث

قاعدة(٤) $\int$(د$_{١}$ (س) ± د$_{٢}$ (س)) ء س = $\int$ د$_{١}$ (س) ء س ± $\int$د$_{٢}$ (س) ء س

وهذه القاعدة تختص بتكامل مجموع (أو حاصل طرح) دالتين أو أكثر

<u>مثال (٤):</u>

أوجد $\int$(س^{٢} + ٦ س) ء س

الحل

$\int$(س^{٢} + ٦ س) ء س = $\int$ س^{٢} ء س + $\int$ ٦ س ء س

= $\int$ س^{٢} د س + $\int$ ٦ س ء س

= $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ + ٦ × $\frac{\text{س}}{٢}$ + ث

= $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ + ٣ س + ث

<u>مثال (٥)</u>

أوجد : ص = $\int$(١٢ س^{٣} + ١٥ س^{٢} + ٢) ء س. عندما س = ١ ، ص = ١٤

الحــل

ص= $\int$(١٢ س^{٣} + ١٥ س^{٢} + ٢) ء س

= ١٢⁄٤ س^{٤} + ١٥⁄٣ س^{٣} + ٢ س + ث

ص= ٣ س^{٤} + ٥ س^{٣} + ٢ س + ث

إذا كانت ص = ١٤ عندما س = ١

٣ × ١ + ٥ × ١ + ٢ × ١ + ث = ١

٣ + ٥ + ٢ + ث = ١٤

١٠ + ث = ١٤

ث = ١٤ – ١٠ ← ∴ ث = ٤

∴ ص = ٣ س^{٤} + ٥ س^{٢} + ٢ س + ٤

قاعدة(٥) تكامل حاصل ضرب الدالة المرفوعة للأس (ن) × المشتقة الأولي للدالة:

= $\frac{\text{الدالة مرفوعة للأس (ن+١)}}{\text{ن + ١}}$ + ث

أي أن : $\int$(أ س + ب)$^{\text{ن}}$ ء س = $\frac{(\text{أ س + ب})^{\text{ن+١}}}{\text{ن + ١}}$ + ث

<u>مثال (٦)</u> **أوجد :$\int$(س^{٣} +٣س^{٢} +٥)^{٢}× (٣س^{٢} +٦س)ء س**

الحــل

$\int$(س^{٣} +٣س^{٢} +٥)^{٢}× (٣س^{٢} +٦س)ء س = $\frac{١}{٣}$ (س^{٣} +٣س^{٢} +٥)^{٣} +ث

❖ لاحظ أن ٣س^{٢} +٦س هو المشتقة الأولى للقوس الأول

مثال (٧)

أوجد :- $\int \sqrt{٣\text{س}^{٣} - ١} \times ٩\text{س}^{٢} \,.\, \text{ءس}$

الحل

بما أن ٩ س ٢ هي المشتقة الأولي للقوس تحت الجذر

$\therefore \int \sqrt{٣\text{س}^{٣} - ١} \times ٩\text{س}^{٢} \,.\, \text{ءس}$

$= \int (٣\text{س}^{٣} - ١)^{\frac{١}{٢}} \times ٩\text{س}^{٢} \,.\, \text{ءس}$

$= \dfrac{(٣\text{س}^{٣} - ١)^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + \text{ث} = \dfrac{٢}{٣}(٣\text{س}^{٣} - ١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

مثال (٨):-

أوجـــد : $\int \frac{١}{٢} \sqrt{٢\text{س} + ٦} \times ٢ \,.\, \text{ءس}$

الحل

$\int \frac{١}{٢} \sqrt{٢\text{س}} + ٦ \times ٢ \,.\, \text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int (٢\text{س} + ٦)^{\frac{١}{٢}} \times ٢ \,\text{ءس} = \dfrac{(٢\text{س} + ٦)^{\frac{١}{٢}+١}}{(\frac{١}{٢}+١)}$

$= \frac{١}{٢} \times \dfrac{(٢\text{س} + ٦)}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث} = \frac{١}{٣}(٢\text{س} + ٦)^{\frac{٢}{٣}} + \text{ث}$

تمارين٦

(١)أكمل

– يعرف التكامل بأنه ....

_ إذا كان لدينا المشتقة الأولي للدالة = ٣ س^{٢} فإن تكامل ص = ...

– تفاضل المشتقة الأولي للمقدار الثابت = ...

– تكامل الثابت = ...

– تكامل مجموع دالتين أو أكثر يساوي ....

– $\frac{١}{\quad}$ ءس = ...

– تكامل حاصل ضرب الدالة المرفوعة للأس لا المشتقة الأولي للدالة = ...

(٢) أوجد قيمة التكامل غير المحدد للأتي :

(١) ∫٨ ء س

(٢) ∫ (–٦) ء س

(٣) ∫ (٣ س + ٢) ء س

(٤) ∫(س^{٣} – ٤ س) ء س

(٥) ∫(٢٠ س^{٣} + ١٢ س^{٢} – ٣) ء س

(٦) ∫(س^{٢} + ٢ س – ٣)^{٢} (٢ س + ٢) ء س

(٧) ∫ ٣ س^{٢} – ٢ × ٦ س ء س

(٨) ∫ $\frac{٣ \quad ٩٠}{(س + ٢)^{٤}}$ ء س

التكامل المحدود Definite Integration

إذا أوجدنا تكامل الدالة ص = د (س) بالنسبة إلي س = أ ثم أوجدنا تكامل نفس الدالة ؛

إذا كانت س = ب .

فإن قيمة الدالة ص = د (س) عندما تتغير قيمة س من أ إلي ب هو التكامل المحدود؛

ويمكن كتابة التكامل المحدود للدالة السابقة كما يلي :

$$\int_{أ}^{ب} د\,(س)\,ءس = [\,د\,(س)\,]_{أ}^{ب} = د\,(ب) - د\,(أ)$$

ويسمي الطرف الأيمن بتكامل د (س) من أ إلي ب بالنسبة إلي س ويسمي أ ، ب بحدي التكامل حيث ب هو الحد الأعلى ، أ هو الحد الأدنى ويمثل الطرف الأيسر الفرق بين ناتج التكامل ويلاحظ أن قيمة هذا المقدار لا توقف علي ثابت التكامل

مثال (١)

أوجد قيمة :- $\int_{١}^{٣} (س^{٢})\,د\,س$

الحل

الحد الأدنى = ١ ، الحد الأعلى = ٣ والدالة المطلوب إيجاد قيمتها هي ص = س^{٢}

∴ المطلوب هو إيجاد الدالة التي تكون المشتقة الأولي لها = س^{٢} .

$$\int_{١}^{٣} س^{٢}\,د\,س = \left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{١}^{٣} = \frac{٣^{٣}}{٣} - \frac{١^{٣}}{٣} = \frac{٢٧}{٣} - \frac{١}{٣} = \frac{٢٦}{٣} = ٨\frac{٢}{٣}$$

مثال (٢)

أوجد قيمة $\int_{-١}^{٢} (س^{٢} + ٦\,س\,)ءس$

الحل

$$\int_{-١}^{٢} (س^{٢} + ٦\,س\,)ءس = \int_{-١}^{٢} (\,س^{٢}\,)\,ء\,س + \int_{-١}^{٢} (\,٦\,س)\,ء\,س$$

$$= \frac{س^{٣}}{٣}\Big|_{-1}^{2} + ٣\,س^{٢}\Big|_{-1}^{2} \quad \text{أو بصورة أخرى} \quad = \left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{-١}^{٢} + [٣س^{٢}]_{-١}^{٢}$$

$$\left(\frac{٢^{٣}}{٣} - \frac{(-١)^{٣}}{٣}\right) + \left(٣\,(٢)^{٢} - ٣\,(-١)^{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{٨}{٣}+\frac{١}{٣}\right) + (٣ \times ٤ - ٣ \times ١)$$

$$= \frac{٩}{٣} + (١٢ - ٣) = ٣ + ٩ = ١٢$$

مما سبق يتضح أن التكامل المحدود له الخصائص التالية :

١) $\int_{م}^{م}$ د (س) ء س = صفر

٢) $\int_{م}^{ب}$ د (س) ء س = $-\int_{ب}^{م}$ د (س) ء س

٣) $\int_{م}^{جـ}$ د (س) ء س = $\int_{م}^{ب}$ د (س) ء س + $\int_{ب}^{جـ}$ د (س) ء س

أمثـــــــلة

١) أوجد قيمة $\int_{٧}^{٧}$ (س)ءس

الحـــل $\int_{٧}^{٧}$ (س)ءس = $\frac{س^٢}{٢}$ = $\left(\frac{٧^٢}{٢} - \frac{٧^٢}{٢}\right)$ = صفر

٢) أوجد (أ) $\int_{١}^{٧}$ (س) ء س (ب) $-\int_{٧}^{١}$ (س) ء س

الحـــل

(أ) $\int_{١}^{٧}$ (س) ء س = $\left.\frac{س^٢}{٢}\right|_{١}^{٧}$ = $\left(\frac{٧^٢}{٢} - \frac{١}{٢}\right)$ = $\frac{٤٩}{٢} - \frac{١}{٢}$ = $\frac{٤٨}{٢}$ = ٢٤

(ب) $-\int_{٧}^{١}$ (س) ء س = $-\left.\frac{س^٢}{٢}\right|_{٧}^{١}$ = $\overline{٣٢}$ $\left(\frac{١}{٢}-\frac{٧^٢}{٢}\right)$

$= -\left(\frac{١}{٢} - \frac{٤٩}{٢}\right) = -\left(-\frac{٤٨}{٢}\right) = -(-٢٤) = ٢٤$

---

(٣) أثبت أن : $\int_{١}^{٧} (س)\, ء\, س = \int_{١}^{٤} (س)\, ء\, س + \int_{٤}^{٧} (س)\, ء\, س$

الحل $\int_{١}^{٤} (س)\, ء\, س = \left.\frac{س^{٢}}{٢}\right|_{١}^{٤} = \frac{١٦}{٢} - \frac{١}{٢} = \frac{١٥}{٢}$

$\int_{٤}^{٧} (س)\, ء\, س = \left.\frac{س^{٢}}{٢}\right|_{٤}^{٧} = \frac{٤٩}{٢} - \frac{١٦}{٢} = \frac{٣٣}{٢}$

$\therefore \int_{١}^{٤} (س)\, ء\, س + \int_{٤}^{٧} (س)\, ء\, س = \frac{١٥}{٢} + \frac{٣٣}{٢} = \frac{٤٨}{٢} = ٢٤$ .... (١)

$\because \int_{١}^{٧} (س)\, ء\, س = ٢٤$ .... (٢) من المثال السابق

من (١) (٢) $\therefore$ الطرفان متساويان

تمارين٧

أوجد قيمة التكامل المحدود للآتي

١) $\int_{1}^{2} \text{س}^{3} \,.\, \text{ء س}$

٢) $\int_{1}^{3} 8 \,.\, \text{ء س}$

٣) $\int_{2}^{5} -6 \,\text{ء س}$

٤) $\int_{0}^{2} \text{س}^{3} \,.\, \text{ء س}$

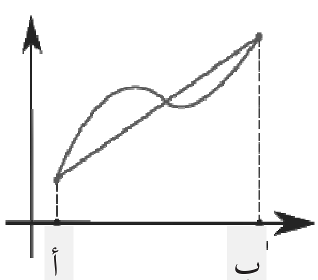
٥) $\int_{1}^{2} \text{س}^{3} \,.\, \text{ء س}$

٦) $\int_{1}^{4} (\text{س}^{2} + \text{ب}) = \text{س}$

٧) $\int_{1}^{2} (3\,\text{س}^{2} - 2\,\text{س} + 5)\ \text{ء س}$

٨) $\int_{1}^{2} \frac{1}{\text{س}+4} \,.\, \text{ء س}$

تطبيقات علي تكامل العدد التقريبي



*قاعدة شبة المنحرف

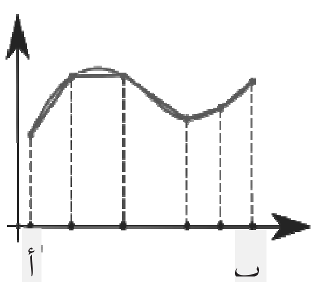
تعتبر قاعدة شبه المنحرف إحدى طرق الحساب التقريبي للتكامل المحدود

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د (س) ء س}$$

تعمل قاعدة شبه المنحرف بتقريب المنطقة تحتي منحني الدالة د (س) بشبه منحرف وحساب مساحته

ينجم عن ذلك :-

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د (س) ء س} \approx \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \times \frac{[\ \text{د(أ)} + \text{د(ب)}\ ]}{2}$$



وحدة القياس

علم القياس (الميترولوجيا يضع – باستمرار – بين أيدي المختصين أجهزة أدق من سابقاتها لمواكبة ركب التقدم العلمي وهو يعتمد قبل كل شئ علي اختيار مناسب لوحدة القياس التي يراد منها أن تكون أساسية عالمية.

علم القياس يحرص بتحقيق من عدم فقدان الكثير من الدقة في تجسيد هذه الوحدة علي شكل وحدة قياس معيارية يرجع إليها العالم كله وهذه الوحدة تستعرض الأتي:

١) الأطوال (نظرية المثلث الحاد – نظرية المثلث المنفرج – نظرية أبولونيوس – محيط الدائرة – طول القوس من الدائرة)

٢) المساحات (مساحة القطاع – مساحة القطعة)

٣) الحجوم (المخروط – المخروط الناقص – الهرم – الهرم الناقص – الأسطوانة القائمة – الاسطوانة المائلة)

(١) الأطـــــوال

المثلث

هو أحد الأشكال الأساسية في الهندسة وهو شكل ثنائي الأبعاد مكون من ثلاثة رؤوس تصل بينها ثلاثة أضلاع وتلك الأضلاع هي قطع مستقيمة.

ويمكن تصنيف المثلثات تبعا لقياس زواياه الثلاثة

* مثلث قائم الزاوية :

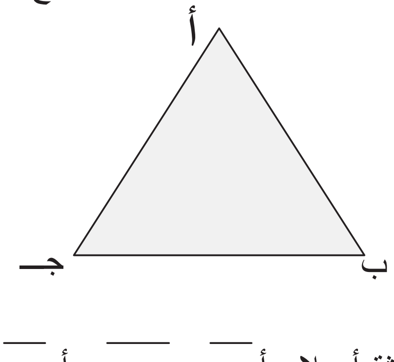
له زاوية قياسها ٩٠ ° (زاوية قائمة) يدعي الضلع المقابل للزاوية القائمة بالوتر وهو أطول أضلاع هذا المثلث

* مثلث حاد الزاوية :

كل زواياه قياسها أصغر من ٩٠ °

* مثلث منفرج الزاوية :

مثلث له زاوية قياسها أكبر من ٩٠ ° وأصغر من ١٨٠ °



ثلاث رؤوس أ، ب ، جـ

ثلاثة أضلاع $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$

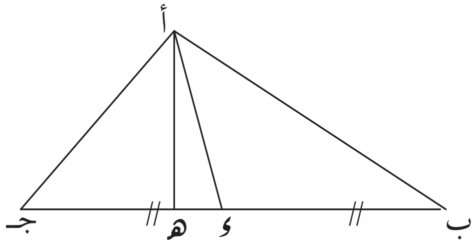
نظرية أبولونيوس

* أبولونيوس

هو عالم هندسة إغريقي عاش في الفترة من ٢٥٥ إلي ١٧٠ قبل الميلاد وكتب بتوسع في الرياضيات البحتة والتطبيقية وحسن في تقريب أرسطو للعدد باي π

* نص النظرية:

مجموع مربعى طولي أي ضلعين من مثلث يساوي ضعف مربع نصف طول الضلع الثالث مضافا إليه ضعف مربع طول المتوسط المنصف لهذا الضلع.



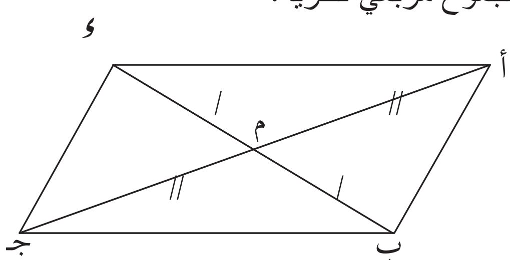
إذا كان ء منتصف الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$

الضلع أ هـ $\perp$ علي الضلع ب جـ

فإن $(\text{أ ب})^٢ + (\text{أ جـ})^٢ = ٢\,(\text{أء})^٢ + ٢\,(\frac{١}{٢}\ \text{ب جـ})^٢$

أمـــثلة:

١) أثبت أن مجموع مربعات أضلاع متوازي الأضلاع مساو لمجموع مربعي قطريه.



البرهان

من نظرية أبولونيوس

في $\triangle$ أ ب جـ

$(\text{أ ب})^٢ + (\text{ب جـ})^٢ = ٢\,(\text{ب م})^٢ + ٢\,(\text{أ م})^٢$

$\therefore (\text{أ ب})^٢ + (\text{ب جـ})^٢ = ٢\,(\frac{١}{٢}\ \text{ب ء})^٢ + ٢\,(\frac{١}{٢}\ \text{أ جـ})^٢$

$(\text{أ ب})^٢ + (\text{ب جـ})^٢ = \frac{١}{٢}(\text{ب ء})^٢ + \frac{١}{٢}\,(\text{أ جـ})^٢$ بضرب طرفي المعادلة × ٢

$٢\,(\text{أ ب})^٢ + ٢\,(\text{ب جـ})^٢ = (\text{ب ء})^٢ + (\text{أ جـ})^٢$

$\therefore (\text{أ ب})^٢ + (\text{ء جـ})^٢ + (\text{ب جـ})^٢ + (\text{أ ء})^٢ = (\text{أ جـ})^٢ + (\text{ب ء})^٢$ #

==

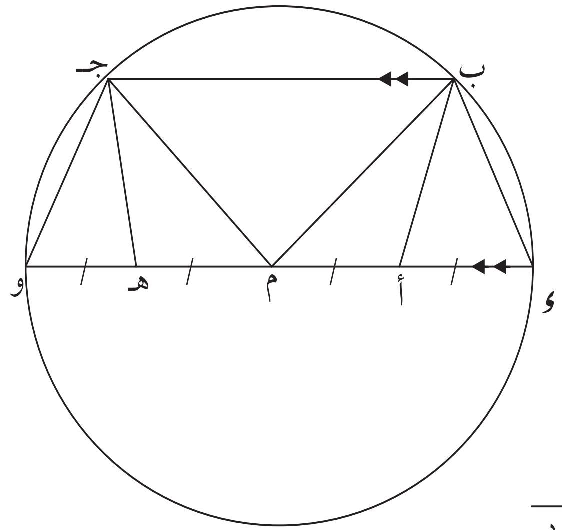
مثال (٢)

د م نصف قطر في الدائرة م ، $\overline{\text{ب جـ}}$ وتر فيها حيث $\overline{\text{د م}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ أ منتصف د م اثبت أن

$(\text{أ ب})^٢ + (\text{أ جـ})^٢ = \frac{٥}{٢}\ \text{نق}^٢$

العمل

نرسم القطر $\overline{\text{د و}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{م و}}$



ثم نصل $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ ، $\overline{\text{هـ جـ}}$ ، $\overline{\text{و جـ}}$

البرهان

في المثلث أ جـ هـ ← من ابلونيوس

$(\text{أ جـ})^{2} + (\text{جـ هـ})^{2} = 2\,(\text{جـ م})^{2} + 2\,(\text{أ م})^{2}$

$(\text{أ جـ})^{2} + (\text{جـ هـ})^{2} = 2\,\text{نق}^{2} + \frac{1}{2}\,\text{نق}^{2}$

$= \frac{5}{2}\,\text{نق}^{2}$

∵ أ ب = جـ هـ لأن ب د = جـ و لأن $\overline{\text{ب جـ}} \,//\, \overline{\text{د و}}$

وكذلك د أ = هـ و = $\frac{1}{2}$ نق ، ق (< ء) = ق (< و)

لأن الشكل ب جـ و ءشبه منحرف متساوي الساقين

∴ $(\text{أ جـ})^{2} + (\text{أ ب})^{2} = \frac{5}{2}\,\text{نق}^{2}$ #

تمارين٨

١) أكمل نظرية أبولونيوس تنص علي أن مجموع مربعي طولي أي ضلعين من مثلث يساوي ....

٢) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، د ، هـ تنتمي إلي القطعة المستقيمة أ جـ بحيث أ د = د هـ = هـ جـ ، ب د = ٧ سم ، ب هـ = ٩ سم أوجد طول كل من أ جـ ، أ ب

٣) س ص ع مثلث قائم الزاوية في س ، النقطتان م ، ن تنتميان للقطعة المستقيمة $\overline{\text{ص ع}}$ بحيث ص م = م ن = ن ع

أثبت أن

$(\text{س م})^{2} + (\text{س ن})^{2} = 5\,(\text{م ن})^{2}$

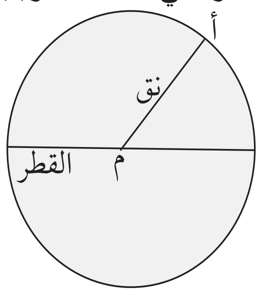
الدائرة

* الدائرة هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك في مستوي يكون بعدها ثابتا عن نقطة ثابتة تسمي النقطة الثابتة بمركز الدائرة والمسافة الثابتة بنصف القطر

* محيط الدائرة:

هي طول المسافة حول محيط الدائرة وتساوي حاصل ضرب قطر الدائرة في النسبة التقريبية ط أو π

حيث ط = $\frac{٢٢}{٧}$ أو 3,14



محيط الدائرة = ط ق

محيط الدائرة = ٢ ط نق

حيث ق قطر الدائرة =٢ نق← نصف القطر

===

أمثـــلة

١) أوجد محيط الدائرة التى قطرها ٦ سم مقربا الجواب إلي أقرب جزء من عشرة

الحـل المحيط = ق × ط

= ط × ٦

= ٦ ط = ٦ × 3,14

= 18,8سم

---

٢) أكمل الجدول

طول القطر	محيط الدائرة
١٥ سم	....
١٢ م	....
....	62,8 مم

٣) دائرة قطرها ٥ سم احسب محيطها

الحـل

محيط الدائرة = طول القطر × ط

= ٥ × 3,14 = 15,7 سم

٤) دراجة نارية طول قطر عجلاتها ٤٠ سم احسب محيط العجلة؟ احسب المسافة التي تقطعها الدراجة بالمتر إذا دارت العجلة ٦٠٠ دورة؟

الحل محيط الدائرة = القطر × النسبة التقريبية

= ق × ط

= ٤٠ × 3,14 = 125,6سم

المسافة = محيط الدائرة × عدد الدورات

= 125,6× ٦٠٠

= ٧٥٣٦٠ سم

= 753,6 متر

===

تمارين٩

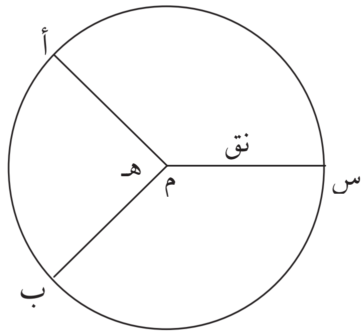
١- دائرة نصف قطرها ٢ سم احسب محيطها.

٢- أوجد طول محيط الدائرة التي طول قطرها = ١٠ سم

٣- أوجد طول محيط الدائرة التي نصف قطرها = ٣ سم

٤- أوجد قطر الدائرة التي محيطها = ٤٤ سم

طول القوس من الدائرة



القوس في الدائرة :

الدائرة م فإذا كانت النقاط أ ، ب ، س للسطح الدائرة

أولا : مجموعة النقاط من أ إلي ب والتي لا تنتمي إليها النقطة س

تسمي القوس الأصغر أ ب ويرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{اب}}$

ثانيا : مجموعة نقاط الدائرة من أ ، ب التي تنتمي إليها النقطة س

تسمي القوس أ س ب الأكبر

(حالة خاصة) إذا كان أ ب قطر في الدائرة م فإن كل من القوس أ س ب ، القوس ب أ يسمي نصف الدائرة

طول القوس :

من المعروف أن طول الدائرة هو نفسه محيط الدائرة = ٢ ط نق

حيث ط = 3,14 أو $\frac{٢٢}{٧}$

فيكون طول القوس هو طول جزء من طول الدائرة

*طول القوس بمعلومية الزاوية المركزية بين ضلعيها

طول القوس = $\frac{\text{قياس الزاوية المركزية}}{٣٦٠}$ × محيط الدائرة

طول القوس = $\frac{\text{س}^\circ}{٣٦٠}$ × ٢ ط نق

ل = $\frac{\text{س}^\circ}{٣٦٠}$ × ٢ ط نق

طول القوس = الزاوية المركزية بالقياس الدائري × نق

ل = هـ$^{\text{د}}$ × نق حيث $\frac{\text{هـ}^{\text{د}}}{\text{ط}}$ = $\frac{\text{س}^\circ}{١٨٠}$

ملاحظات

١) قياس نصف الدائرة = $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠ = ١٨٠ $^\circ$

بينما طول نصف الدائرة = $\frac{١}{٢}$× ٢ ط نق = ط نق وحدة طول

٢) قياس ربع الدائرة = $\frac{١}{٤}$× ٣٦٠ = ٩٠ °

بينما طول ربع الدائرة = $\frac{١}{٤}$× ٢ ط نق =$\frac{١}{٢}$ ط نق وحدة طول

أمثـــــلة

١) أوجد طول القوس من دائرة نصف قطرها ١٠ سم والزاوية المركزية للقوس تساوي ٤٥ °

و(ط = 3,14)

الحـــل ل = $\frac{س^{°}}{٣٦٠}$× ٢ ط نق = $\frac{٤٥}{360}$× ٢ × 3,14× ١٠ = 7,85سم

حل أخر

$\frac{هـ^{د}}{ط} = \frac{س^{°}}{١٨٠}$

$\frac{هـ^{د}}{3,14} = \frac{٤٥}{١٨٠}$

هــ^{د} = $\frac{٤٥×3,14}{١٨٠}$ = 0,785 ^{د}

ل = هــ ^{د} × نق

ل = 0,785× ١٠ = 7,85 سم

---

٢) أوجد بالدرجات الزاوية المركزية التي تقابل قوسا طوله 2,2سم في دائرة نصف قطرها 3,6 سم

(ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحـــل ل = هــ^{د} × نق

2,2 = هــ ^{د} × 3,6

هــ^{د} = $\frac{\mathbf{2,2}}{\mathbf{3,6}}$ = 0,61 ^{د}

$\frac{هـ^{د}}{ط}$ $\frac{س^{°}}{١٨٠}$

س° = $\frac{هـ^{د}× ١٨٠}{ط}$ = $\frac{0,61 ×١٨٠}{\frac{٢٢}{٧}}$ = 34,9° ≈ ٣٥ °

تمارين ١٠

١) أكمل :

ا- طول القوس هو ....

ب- طول نصف الدائرة .... وحدة طول .

ج- محيط الدائرة = ...

د- طول ربع الدائرة التي نصف قطرها نق = ... وحدة طول

٢) أوجد طول القوس الذي تحصر زاوية مركزية قياسها يساوى2,3 زاوية نصف قطرية و طول نصف قطرها ١٠ سم

٣) أوجد طول القوس التي تحصره زاوية مركزية قياسها ٩٠ ° في دائرة طول نصف قطرها ٤ سم (ط = 3,14)

٤) أوجد طول القوس من دائرة نصف قطرها ١٠ سم والزاوية المركزية للقوس تساوي ٤٥ °

٥) أوجد طول قوس في دائرة نصف قطرها ٢١ سم والذي يقابل زاوية مركزية $\frac{\pi}{٣}$

٦) دائرة نصف قطرها ٥ سم أخذ منها قوسا طوله ٤ سم أوجد مقدار الزاوية المركزية التي تقابله إلي أقرب درجة (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

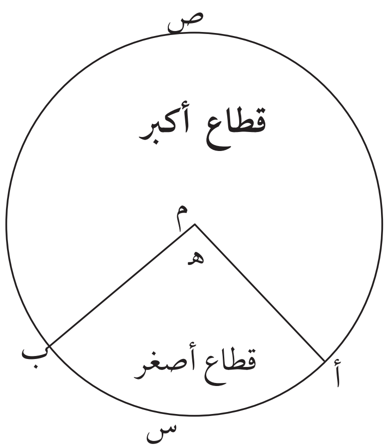
٧) أوجد الزاوية المركزية التي تقابل قوسا طوله $\frac{٣}{٨}$ ط في دائرة نصف قطرها ١٠ سم.

٨) دائرة محيطها 31,4سم احسب الزاوية المركزية إذا كان طول القوس = 3,5 سم

٩) زاوية مركزية تقابل قوسا طوله ٢٢ سم في دائرة نصف قطرها ٦ سم فكم قياس الزاوية المركزية؟

١٠) أوجد طول قوس ربع دائرة طول نصف قطرها 12,6سم.

٢- المساحات



القطاع الدائري:

هو جزء من سطح الدائرة محصور بين قوس ونصفي قطرين

القطاع الدائري م أ س ب قطاع دائري أصغر

القطاع الدائري م أ ص ب قطاع دائري أكبر

القطاع الأصغر   القطاع الأكبر = سطح الدائرة

* مساحة القطاع الدائري:

انت تعلم أن الدورة الكاملة ٣٦٠ ° تقابل دائرة مساحتها = ط نق^{٢}

وعليه إذا كانت الزاوية المركزية للقطاع الدائري هـ ° ونصف القطر نق فإن

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{الزاوية المركزية}}{٣٦٠} \times \text{مساحة سطح الدائرة}$$

$$= \frac{\text{هـ}^{\circ}}{٣٦٠} \times \text{ط نق}^{٢} \text{ ....(١)}$$

وبما أن الزاوية هـ° بالتقدير الستيني وتعادل بالتقدير الدائري الآتي :

$$\text{هـ}^{\circ} = \frac{\text{هـ}^{ء}}{\text{ط}} = \frac{\text{هـ}^{\circ}}{١٨٠}$$

$$\therefore \text{هـ}^{\circ} = \frac{\text{هـ}^{ء} \times ١٨٠}{\text{ط}}$$

$\therefore$ مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ هـ^{ء} × نق^{٢} .... (٢)

وبما أن طول القوس (ل) = هـ^{ء} × نق

$\therefore$ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل × نق ....(٣)

ملحوظة

* مساحة القطاع الدائري = $\frac{\text{س}^{\circ}}{٣٦٠}$ × ط نق^{٢}

* مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ هـ^{ء} × نق ^{٢}

* مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ ل × نق

* محيط القطاع الدائري = قطر الدائرة + طول القوس = ٢ نق + ل

حيث نق = $\frac{١}{٢}$ قطر الدائرة
ل = طول القوس

أمثـــــلة :

١) أوجد مساحة قطاع دائري نصف قطر دائرته ٨ سم ومحيطه ٢٥ سم .

الحـل محيط القطاع = ٢ نق + ل

محيط القطاع = ٢ × ٨ + ل

٢٥ = ١٦ + ل

ل = ٢٥ – ١٦ = ٩ سم

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{\text{ل} \times \text{نق}}{٢}$

= $\frac{٩ \times ٨}{٢}$ = ٣٦ سم^{٢}

---

٢) قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ١٥ سم ومساحته ٢٧٠ سم^{٢}

أوجد :–

أ – الزاوية المركزية للقطاع.

ب – طول القوس .

الحـل

أ) المساحة = $\frac{١}{٢}$هــ^{ء}× نق ^{٢}

٢٧٠ = $\frac{١}{٢}$× هــ^{ء} × ١٥ ^{٢}

هــ^{ء}= $\frac{٢٧٠ \times ٢}{٢٢٥}$ = 2,4^{ء}

ب) ل = هــ^{ء} × نق

ل = 2,4 × ١٥ = ٣٦ سم

---

٣) أوجد مساحة القطاع الدائري إذا علم أن طول قوس الدائرة ٦ سم ونصف قطر الدائرة ٨ سم

الحـل مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل × نق = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم^{٢}

٤) أوجد مساحة قطاع دائري لدائرة نصف قطرها ١٠ سم وزاويتها المركزية بالقياس التقديري 2,94 زاوية نص قطرية

الحـل مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × هــ ^{ء}

= $\frac{١}{٢}$× ١٠٠ × 2,94 = ١٤٧ سم^{٢}

==

تمارين ١١

١) أوجد طول القوس في دائرة نصف قطرها ٣٢ سم وزاويته المركزية ٣٦ ° .

٢) أوجد مساحة قطاع دائري قياس زاويته ١٢٠ ° ونصف قطر دائرته ١٠ سم.

٣) قطاع دائري قياس زاويته المركزية 2,2ء وطول قوسه ١١ سم ، أحسب مساحته.

٤) أوجد طول القوس في دائرة نصف قطرها ٩ وحدة وزاويته المركزية ٣ = ٣ ط

٥) قطاع دائري طول قوسه ٦٦ سم وقياس زاويته المركزية ٢٤٠ °

أوجد طول نصف قطر الدائرة (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

٦) قطاع دائري محيطه ٧٥ سم وطول قطر قاعدته ٦٠ سم احسب طول قوسه.

٧) قطاع دائري طول نصف قطرة ٨ سم وطول قوسه ٢٢ سم احسب مساحة القطاع الدائري .

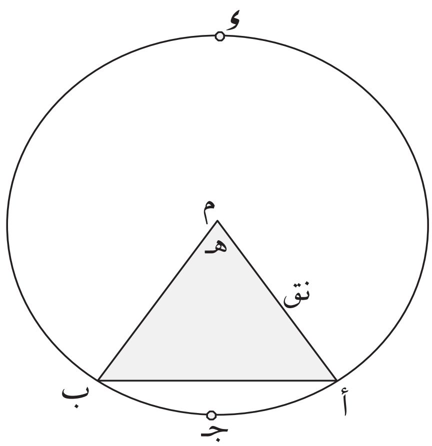
٨) قطاع دائري زاويته المركزية ١٣٥ ° ومساحته ٢٣١ سم^{٢} أوجد نصف القطر دائرته ؟

٩) قطاع دائري في دائرة وطول نصف قطرها ٩ سم وزاويته المركزية ٧٠ ° أوجد محيطه ومساحته؟

١٠) قطاع دائري مساحته 88,4 سم^{٢} وطول نصف قطر قاعدته ١٢ سم فما قياس زاويته المركزية؟

القطعة الدائرية

تعريف : القطعة الدائرية هي جزء من سطح الدائرة محدود بقوس ووتر مار بنهايتي القوس



مساحة القطعة الدائرية

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^{2} (هـ ء − جا هـ °)

مساحة القطعة الصغري أ ب جـ

= مساحة القطاع م أ جـ ب − مساحة △ أ م جـ

نتيـجة : − مساحة سطح المثلث

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولا أي ضلعين منه.

× جيب الزاوية المحصورة بينهما

أمثـلة

١) أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ١٣٥ °

الحـل

$$\frac{\text{هـ}^{\text{ء}}}{\text{ط}} = \frac{\text{س}^{\circ}}{١٨٠}$$

$$\text{هـ}^{\text{ء}} = \frac{\text{س}^{\circ} \times \text{ط}}{١٨٠} = \frac{١٣٥ \times \frac{٢٢}{٧}}{١٨٠} = 2{,}35^{\text{ء}}$$

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^{2} × (هـ ء − جا س °)

= $\frac{1}{2}$ × (١٠) ^{2} × (2,35 − جا ١٣٥ °) = 82,45 سم^{2}

---

٢) قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وطول قوسها ٢٢ سم أوجد مساحتها لأقرب سم^{2}

الحـل ∴ هـ ء = $\frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ ⟵ هـ ء = $\frac{٢٢}{١٠}$ = 2,2 ء

ومن القانون $\frac{\text{هـ}^{\text{ء}}}{\text{ط}} = \frac{\text{س}^{\circ}}{١٨٠}$

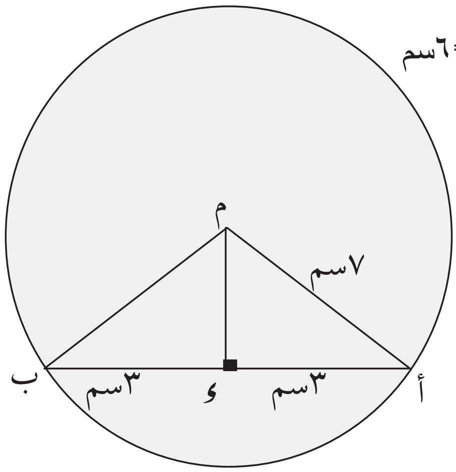
$$\text{س}^{\circ} = \frac{\text{هـ}^{\text{ء}} \times ١٨٠}{\text{ط}} = \frac{2{,}2 \times ١٨٠}{3{,}14} = ١٢٦^{\circ}\ ٣'$$

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^{2} × (هـ ء − جا س°)

= $\frac{1}{2}$ × (١٠)^{2} × (٢.٢ − جا ٣َ ١٢٦ °) = ٥٧,٦٩ = ٧٠ سم^{2}

٣) من المعطيات بالشكل المقابل :

أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغري التي وترها أ ب =٦سم



الحل نرسم مء ⊥ أ ب فيكون ء منتصف أ ب

∴ أ ء= ء ب = $\frac{٦}{٢}$= ٣ سم

∴ جا ($\widehat{أ م د}$) = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٣}{٧}$ = 0,4286

باستخدام الألة الحاسبة

∴ ق ($\widehat{أ م د}$) = ٢٣َ ٢٥°

∴ ق ($\widehat{أ م ب}$) = ٤٦َ ٥٠°

ومن القانون $\frac{\text{هـ ء}}{١}$ = $\frac{\text{س°}}{١٨٠}$

∴ هـ ء = $\frac{\text{ط × س°}}{١٨٠}$

وبالتعويض هـ ء = $\frac{3,14 \times ٤٦/ ٥٠°}{١٨٠}$ = 0,886 ء

مساحة القطعة الصغري = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × (هـ ء – جا س°)

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٩ × (0,886 – جا ٤٦/ ٥٠°) = 2,7 سم^{٢}

---

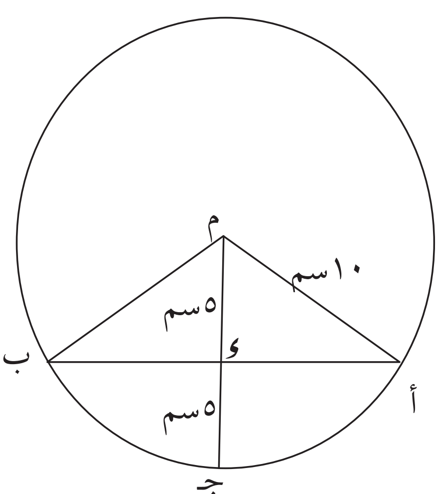
٤) أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وإرتفاعها ٥ سم .

الحل نرسم م د ⊥ أ ب يقطع الدائرة في جـ فيكون جـ د ارتفاع القطعة .

∴ م جـ نصف قطر الدائرة

∴ م جـ = ١٠ سم

، م د = ٥ سم



، جتا ($\widehat{أ م د}$) = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$ ⟵ جتا = 0,5

∴ ق ($\widehat{أ م د}$) = ٦٠ °

∴ ق ($\widehat{أ م ب}$) = ١٢٠ °

$\frac{\text{هـ ء}}{\text{ط}}$ = $\frac{\text{س°}}{١٨٠}$

∴ هـ ء= $\frac{\text{س°× ط}}{١٨٠}$

$$هـ^د = \frac{١٢٠ \times 3,14}{١٨٠} = 2,09^{\prime}$$

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ × (هـ$^{\prime}$ – جا س$^\circ$)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ × (2,09 – جا ١٢٠) = 61,42سم^٢

---

٥) أوجد مساحة قطعة دائرية طول وترها = طول نصف قطر دائرتها = ١٥ سم

الحل ∵ أ ب = م أ

∴ △ م أ ب متساوي الأضلاع

∴ ق ($\widehat{أ م ب}$) = ٦٠ ° هـ ° = ٦٠ °

∴ $\frac{هـ^د}{ط} = \frac{هـ^\circ}{١٨٠}$ = هـ$^{\prime}$ = $\frac{ط \times هـ^\circ}{١٨٠}$ = $\frac{٣.١٤ \times ٦٠}{١٨٠}$ = ١.٠٤٧^د

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ × (هـ$^{\prime}$ – جا س$^\circ$)

= $\frac{١}{٢}$ × (١٥)^٢ × (1,047$^{\prime}$ – جا ٦٠ °) = 20,38 سم^٢

==

تمارين١٢

١- أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ٨ سم وقياس زاويتها المركزية ٦٠ °

٢- أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ٢٠ سم

وقياس زاويتها المركزية ٢.٢٤$^{\prime}$

٣- أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغري التي طول وترها ٨ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها٦٠ ° .

٤- أوجد مساحة قطعة دائرية وترها ٨ سم وتبعد عن المركز ٣٠ سم.

٥- احسب مساحة قطعة دائرية ارتفاعها ٤ سم وطول نصف قطر دائرتها ٨ سم .

٦- دائرتان طولا نصفي قطريهما ٦ سم ، ٨ سم والبعد بين مركزيهما ١٠ سم

أوجد مساحة المنطقة المشتركة بين الدائرتين.

٣- الحجوم

المخروط

هو مجسم ينتج من توصيل جميع نقاط منحني مغلق بنقطة لا تنتمي إليه.

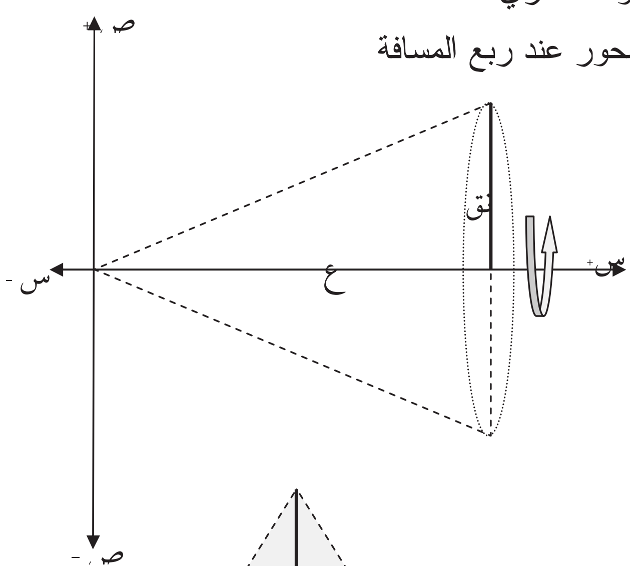
ويسمي المنحني الخط الدليلي والنقطة برأس المخروط

ويسمي كل مستقيم يوصله بين الخط الدليلي والرأس برا سم المخروط

وأيضا :

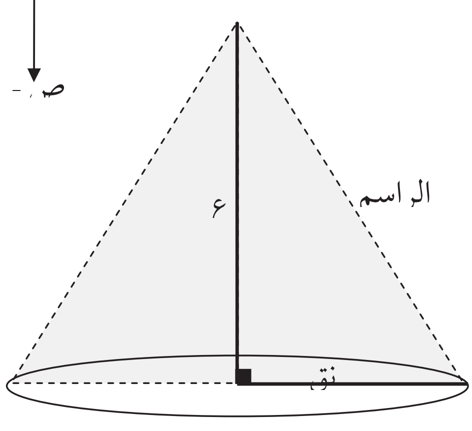
المخروط هو المجسم الناتج من تدوير مثلث قائم الزاوية حول أحد ضلعي الزاوية القائمة بدورة كاملة.

* عندما يكون الخط الدليلي دائرة يسمي المخروط مخروط دائري .
* وعندما تكون جميع الروا سم متساوية في الطول يسمي المخروط الدائري القائم .
* وإذا قطعنا المخروط الدائري القائم بمستوي لا يشمل رأسه فإن المقطع يسمي القطع المخروطي.
* وإرتفاع المخروط هو المستقيم العمودي من قمة رأس المخروط إلي القاعدة
  ويسمي أيضا طول المخروط.
* وإذا قيل مخروط بدون إضافات فإنه يكون المخروط الدائري .
* يقع مركز المخروط ذو الكثافة المتجانسة علي المحور عند ربع المسافة
  من مركز ثقل القاعدة بإتجاه القمة.



إيجاد حجم المخروط الدائري القائم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الإرتفاع



ونلاحظ أيضا

* ان المساحة الجانبية للمخروط

= ط نق ل حيث ل (طول الراسم) = نق^{٢} + ع^{٢}

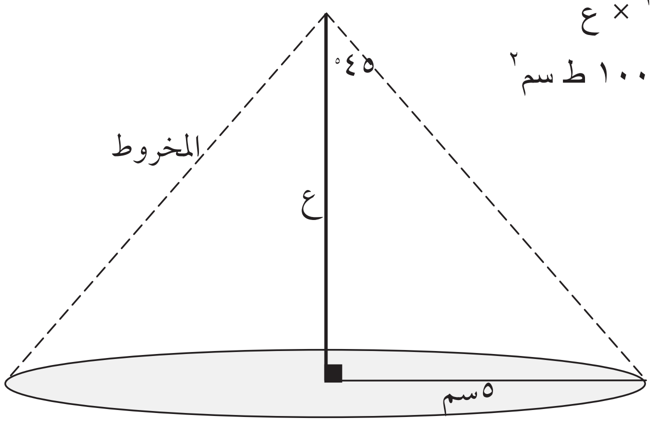
* وأن المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ط نق ل + ط نق^{٢}

أمثلة :

١–مخروط دائري قائم ارتفاعه١٢ سم ونصف قطر قاعدته ٥ سم حفرت فجوة على شكل مخروط دائري قائم يتحد مع المخروط الأول في القاعدة وزاويته نصف الرأسية ٤٥ ° أوجد حجم الجزء المتبقي

الحل



حجم المخروط الأول = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} × ع

= $\frac{١}{٣}$ ط × ٢٥ × ١٢ = ١٠٠ ط سم^{٢}

بالنسبة للمخروط الثاني

ظا ٤٥ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ظا 45= $\frac{٥}{ع}$

ع = $\frac{٥}{\text{ظا ٤٥}}$ = ٥ سم

حجم المخروط الثاني = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} × ع

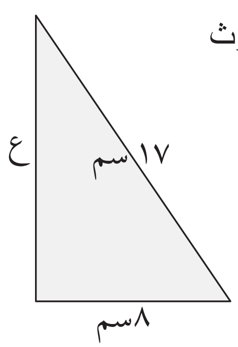
= $\frac{١}{٣}$ ط × ٢٥ × ٥ = $\frac{١٢٥}{٣}$ ط سم^{٣}

حجم الجزء المتبقي = حجم المخروط الأول – حجم المخروط الثاني

= ١٠٠ ط – $\frac{١٢٥}{٣}$ ط = $\frac{١٧٥}{٣}$ ط سم^{٣}

٢– مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٨ سم وطول حرفه المائل ١٧ سم احسب ارتفاعه؟

الحل



∴ المخروط دائري قائم بتطبيق نظرية فيثاغورث

(الارتفاع)^{٢} = (ل)^{٢} = نق^{٢}

ع^{٢} = (١٧)^{٢} – (٨)^{٢} = ٢٢٥

بأخذ الجزء التربيعي

ع = ١٥ سم

(٣) مخروط حجمه ١٥٤٠ سم^{٣} وطول قطره ١٤ سم احسب ارتفاعه

الحل حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} × ع

١٥٤٠ = $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)^{٢} × ع

١٥٤٠ = $\frac{١}{٣}$ × ٢٢ × ٧ × ع

١٥٤٠ × ٣ = ٢٢ × ٧ ع

ع = $\frac{١٥٤٠ \times ٣}{(٢٢ \times ٧)}$ = 30 سم

٤- مخروط حجمه ١٠٠٠ سم^{٣} وارتفاعه ٥ سم احسب مساحة قاعدته؟

الحل

الحجم = $\frac{١}{٣}$ط نق^{٢} × ع الحجم= $\frac{١}{٣}$× مساحة القاعدة × ع

١٠٠٠ = $\frac{١}{٣}$× مساحة القاعدة × ٥

مساحة القاعدة = $\frac{٣ \times ١٠٠٠}{٥}$ = ٦٠٠ سم^{٢}

تمارين ١٣

١) أكمل

أ- المخروط هو ....

ب- يسمي كل مستقيم يوصله بين الخط الدليلي والرأس............

ج- .... هو المستقيم العمودي من قمة رأس المخروط إلي القاعدة.

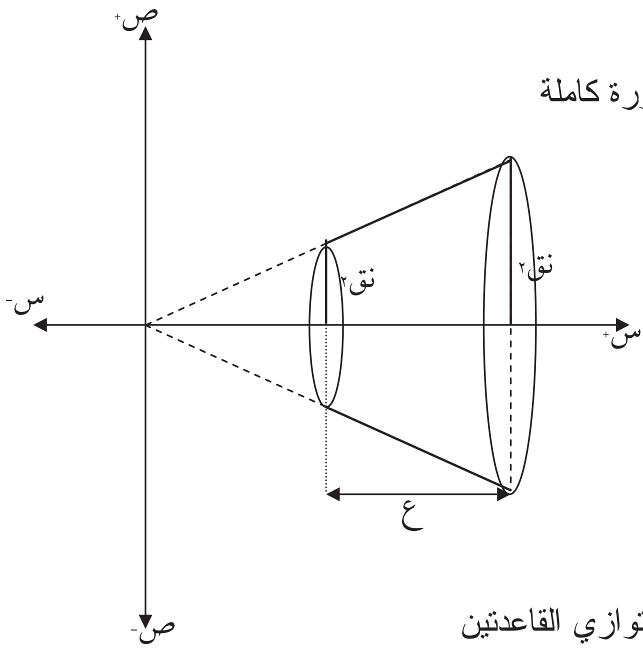
٢) مخروط حجمه ٥٠٠ سم^{٣} ومساحة قاعدته ٥٠ سم^{٢} احسب ارتفاعه.

٣) أوجد ارتفاع المخروط الذي طول نصف قطر قاعدته ٢١ سم وحجمه ٨٨٢٠ ط سم^{٣}

٤) أوجد حجم المخروط إذا كان نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم

٥) إذا كان محيط قاعدة مخروط دائري قائم ٣٧.٦٨ وارتفاعه ١٠ سم أوجد حجمه.

▪ المخروط الناقص



ينشأ من دوران شبه منحرف قائم حول ارتفاعه دورة كاملة

* حجم المخروط الناقص

$= \frac{1}{3}$ ط ع (نق$_1^2$ + نق$_1$ نق$_2$ + نق$_2^2$)

* طول الراسم = $\sqrt{\text{نق}_1^2 + \text{نق}_2^2}$

حيث ع الارتفاع

نق$_1$ نصف قطر القاعدة الصغرى

نق$_2$ نصف قطر القاعدة الكبرى

أمثـــلة

١) أوجد حجم المخروط الدائري القائم الناقص المتوازي القاعدتين

إذا كان نصف قطر قاعدته ٤ سم ، ٦ سم وارتفاعه ١٠ سم

الحل الحجم = $\frac{1}{3}$ ط ع (نق$_2^2$ + نق$_1$ نق$_2$ + نق$_1^2$)

$= \frac{1}{3}$ط × ١٠ (٣٦ + ٤ × ٦ + ١٦)

$= \frac{1}{3}$ط × ١٠ (٣٦ + ٢٤ + ١٦)

$= \frac{1}{3}$ط × ١٠ × ٧٦ = ٢٥٣.٣٣ سم^3

---

٢) مخروط دائري قائم ناقص متوازي القاعدتين حجمه ٨٤ ط سم^3 وطولا نصفي قطر قاعدتيه ٦ سم ،

٣ سم أوجد طول راسمه؟

الحل حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ ط ع (نق$_2^2$ + نق$_1$ نق$_2$ + نق$_2^2$)

٨٤ ط = $\frac{1}{3}$ط × ع × (٣٦ + ١٨ + ٩)

٨٤ ط = ٢١ ط ع ⟵ ع = $\frac{٨٤}{٢١}$ = ٤ سم

إذا كان طول الراسم = ل فإن ⟵ ل^2 = نق$_1^2$ + نق$_1^2$

ل^2 = ٩ + ١٦ = ٢٥ ل = ٥ سم

تمارين ١٤

١) أوجد حجم المخروط الدائري القائم الناقص المتوازي القاعدتين إذا كان

نصف قطر قاعدتيه ٥ سم ، ٨ سم وارتفاعه ١٢ سم

٢) مخروط دائري قائم حجمه ١٢٥ ط سم^{٣} وزاويته نصف الرأسية ٦٩ $^{\circ}$ أوجد حجمه.

٣) مخروط دائري قائم ناقص متوازي القاعدتين حجمه ١٥٤ ط سم^{٣} وطولا نصفي قاعدتيه

٨ سم ، ٥ سم أوجد طول راسمه.

٤) مخروط دائري قائم نصف قاعدته ١٠ سم وزاويته النصف راسمه ٣٠ $^{\circ}$ أوجد حجمه.

٥) مخروط حجمه ١٥٤ سم^{٣} وطول قطره ٧ سم احسب ارتفاعه (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

٦) معتبراً ط = ٣.١٤ احسب طول نصف قطر قاعدة مخروط حجمه ١٨.٨٤ سم^{٣} وارتفاعه ٢ سم

٧) مخروط حجمه ١٥٤٠ سم^{٣} وطول قطره ١٤ سم احسب ارتفاع المخروط؟

الهرم

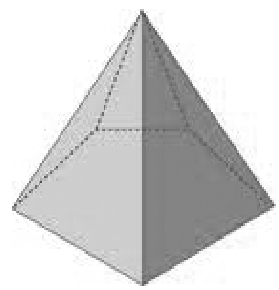
لابد وأنك تعرف أهرام مصر فهي إحدى عجائب الدنيا السبع ولا بد أنك تعرف شكلها الهندسي ومما تتكون فهو عبارة عن قاعدة مربعة الشكل وأوجهه مثلثات متساوية الساقين

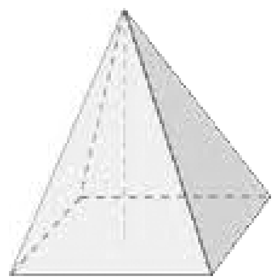
∴ تعريف الهرم :-

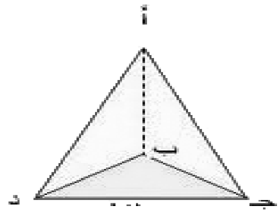
هو عبارة عن مجسم له قاعدة منتظمة وله أوجه جانبيه عبارة عن مثلثات متساوية الساقين عددها عدد أضلاع * القاعدة وتلتقي رؤوسها في نقطة واحدة هي رأس الهرم

* يسمي ارتفاع المثلث المتساوي الساقين بالارتفاع الجانبي للهرم.

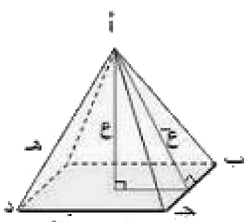
* أما ارتفاع الهرم فهو الخط العمودي النازل من رأسه علي قاعدته.







هرم ثلاثي منتظم



هرم رباعي منتظم

وهناك هرم ثلاثي وسداسي والذي يحدد نوع الهرم هو عدد أضلاع قاعدته.

* حجم الهرم القائم :

لا شك أن الحجم الهرم الرباعي أصغر من حجم متوازي المستطيلات الذي له ذات القاعدة والارتفاع وقد وجد العلماء من تجارب أجريت علي متوازي مستطيلات وأهرامات لها نفس الارتفاع أن :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ حجم المنشور المشترك معه في القاعدة والارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

أمثـــــلة

١) هرم ثلاثي قائم مساحة قاعدته ٩٩ سم^{٢} وارتفاعه ١٠ سم أوجد حجمة ؟

الحـل الحجم = $\frac{١}{٣}$× مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × ٩٩ × ١٠ = ٣٣٠ سم^{٣}

٢) هرم رباعي طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ٢١ سم أوجد الحجم

الحـل الحجم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ١٠ × ١٠ × ٢١ = ٧٠٠ سم^{٣}

تمارين ١٥

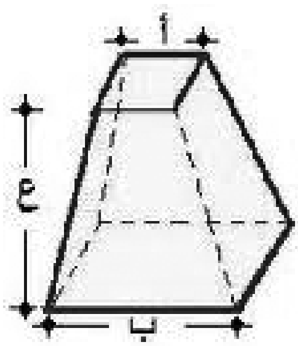
١) هرم ثلاثي قائم طول ضلع قاعدته ٦ سم وارتفاعه الجانبي ٤ سم أوجد حجمه.

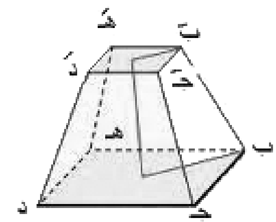
٢) أوجد حجم هرم رباعي قائم ارتفاعه ٨ سم وطول ضلع قاعدته ١٢ سم .

٣) هرم زباعى قائم طول ضلع قاعدتة ٨ سم وإرتفاعة ٤ سم أوجد حجمة.

الهرم الناقص

إذا قطع الهرم بمستوي يوازي قاعدته نشأ هرم ناقص متوازي القاعدتين النسبة بين مساحتي القاعدتين كالنسبة بين مربعي بعديهما عن رأس الهرم





جذع هرم منتظم

حجم الهرم الناقص المتوازي القاعدتين

$= \frac{1}{3}$ ع (ق$_1$ + ق$_2$ + $\sqrt{\text{ق}_1 \text{ ق}_2}$)

حيث ق$_1$ ، ق$_2$ مساحتي القاعدتين ، ع ارتفاع الهرم الناقص

(المسافة العمودية بين القاعدتين)

أمثلة

مثال١) في هرم رباعي ناقص وقائم ، قاعدتية علي شكل مربع أبعادهما ٥ سم ، ١٥ سم إذا كان الارتفاع ١٢ سم فأحسب حجم الهرم

الحل ق$_1$ = مساحة القاعدة الصغرى = ٥^2 = ٢٥ سم^2

ق$_2$ = مساحة القاعدة الكبرى = ١٥^2 = ٢٢٥سم^2

حجم الهرم الناقص = $\frac{1}{3}$ع × (ق$_1$ + ق$_2$ + $\sqrt{\text{ق}_1 \text{ ق}_2}$)

= $\frac{1}{3}$ × ١٢ × (٢٥ + ٢٢٥ + $\sqrt{٢٥ \times ٢٢٥}$)

= ٤ (٢٥ + ٢٢٥ + ٧٥) = ٤ × ٣٢٥ = ١٣٠٠ سم^3

<u>تمارين١٦</u>

١) أكمل

١- الهرم القائم هو ....

٢- الهرم القائم الناقص هو ....

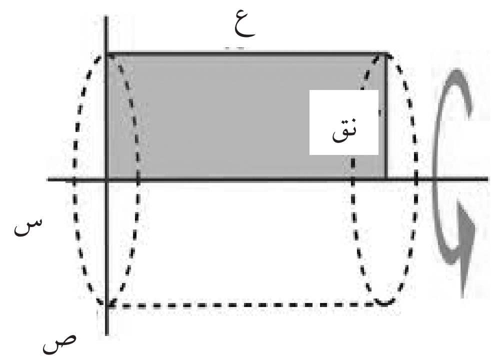
٣- حجم الهرم القائم ....

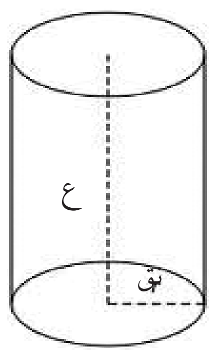
٤- حجم الهرم القائم الناقص.............

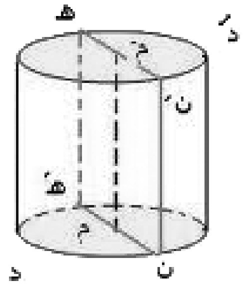
٢) هرم رباعي ناقص وقائم قاعدتا علي شكل مربع أبعادهما ٤ سم ، ١٦ سم إذا كان الارتفاع ١٥ سم فأحسب حجم الهرم؟

الأسطوانة القائمة

تنشأ الأسطوانة الدائرية القائمة من دوران مستطيل حول أحد بعديه دورة كاملة ويكون هذا البعد ارتفاع الاسطوانة والبعد الأخر هو نصف قطرهما







حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ط نق^{٢} × ع

ملحوظة :

المساحة الجانبية للاسطوانة = ٢ ط نق ع

المساحة الكلية = ٢ ط نق ع + ٢ ط نق ^{٢}

أمثـــلة

١) أوجد حجم الاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها ٧ سم وارتفاعها ٤ سم

الحـــل حجم الاسطوانة = ط نق^{٢} × ع

= $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)^{٢} × ٤ = ٦١٦ سم^{٢}

---

٣) أسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ٨ سم وارتفاعها ١٤ سم احسب حجمها

الحـــل الحجم = ط نق^{٢} × ع

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٨ × ٨ × ١٤ = ٢٨١٦ سم^{٢}

٣) اسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٨٤ سم وارتفاعها ٢١ سم احسب حجمها بالأمتار المكعبة

الحـل

الحجم = ط نق^{٢} × ع

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٢ × ٤٢ × ٢١ = ١١٦٤٢٤ سم^{٣} = 0,12متر^{٣}

الاسطوانة المائلة:

ارتفاعها = طول الحرف الجانبي × جيب زاوية ميل حرفها الجانبي علي القاعدة

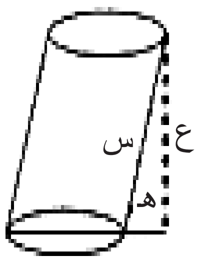
ع = س جا هـ

∴ الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ط نق^{٢} × ع

الاسطوانة المائلة:

ارتفاعها = طول الحرف الجانبى × جيب زاوية حرفها الجانبى على القاعدة



ع = س جا هـ

<u>مثال ١)</u>

١) اسطوانة دائرية مائلة نصف قطرها ٥ سم وحرفها الجانبي يميل علي مستوي القاعدة بزاوية قياسها ٦٠ ° أوجد الاسطوانة حيث أن طول حرفها الجانبي ٦ سم

(ط = 3,14)

الحـل ع = س × جا هـ

ع = ٦ × جا ٦٠ = ٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٣ $\sqrt{٣}$ سم

الحجم = ط نق^{٢} × ع

= 3,14× ٥ ^{٢} × ٣ $\sqrt{٣}$

= 3,14 × ٢٥ × ٣ $\sqrt{٣}$ = ٢٣٥.٥ $\sqrt{٣}$ سم^{٣}

<u>مثال ٢)</u>

اسطوانة دائرية مائلة طول حرفها ١٠ سم ويميل علي مستوي القاعدة بزاويـــة قياســـها ٤٥ ° أوجـــد حجمها حيث أن نصف قطرها = ٨ سم (ط = 3,14)

الحـل ع = س × جا هـ

ع = ١٠ × جا ٤٥ = ١٠ × $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = ٥ $\sqrt{2}$ سم

الحجم = ط نق^{٢} × ع

= 3,14× ٨^{٢} × ٥ $\sqrt{2}$ = 1004,8 $\sqrt{2}$سم^{٣}

===

تمارين١٧

١) أكمل :

أ- تنشأ الاسطوانة الدائرية القائمة من ....

ب- حجم الاسطوانة الدائرية القائمة = ...

جـ- ارتفاع الاسطوانة الدائرية المائلة = ... × ....

ء- حجم الاسطوانة الدائرية المائلة = ...

٢) اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها ٥ سم ارتفاعها ٨ سم أوجد حجمها.

٣) اسطوانة قائمة نصف قطرها ٦ سم وارتفاعها ٢٠ سم أوجد حجمها.

٤) أوجد حجم الاسطوانة نصف قطرها ٧ سم وارتفاعها ٧ سم وارتفاعها ١٤ سم

٥) أوجد حجم الاسطوانة الدائرية المائلة التي نصف قطرها قاعدتها ٧ سم وطول حرفها الجانبي ١٤ سم ويميل علي القاعدة بزاوية قياسها ٣٠ $^{\circ}$ (ط = 3,14)